

111-12.610

UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” IAȘI  
FACULTATEA DE FIZICĂ  
CATEDRA DE OPTICĂ-SPECTROSCOPIE

Gh. N. SINGUREL, M. STRAT,  
Dana-Ortansa DOROHAI, A. BRADU

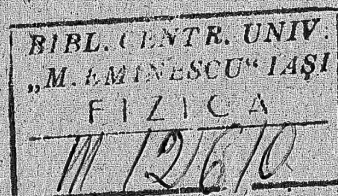
# PROBLEME de OPTICĂ

*Ediție revăzută și adăugită*



134308  
B.C.U. - IASI

EDITURA UNIVERSITĂȚII „ALEXANDRU IOAN CUZA”  
IAȘI – 2001



**Referenți:**

Prof. Dr. **Mihai DELIBAS** – Facultatea de Fizică

Lector Drd. **Silviu GURLUI** – Facultatea de Fizică

Autorii exprimă mulțumiri referenților pentru efortul depus și mai ales pentru observațiile utile efectuate.

Tehnoredactarea textului precum și efectuarea figurilor a fost realizată de către

**D-l Ing. Petru NISTOR.**

Autorii exprimă aleasa lor considerație pentru efortul depus.

**CUPRINS**

1. Interferența a două fascicule de radiație optică	1
2. Oglinzile lui Fresnel. Spectru canelat	8
3. Oglinza lui Lloyd	13
4. Biprisma lui Fresnel	23
5. Bilentilele lui Billet – 1	32
6. Bilentilele lui Billet – 2	38
7. Pana de aer	47
8. Inelele lui Newton localizate	52
9. Inelele lui Newton. Variația temperaturii	58
10. Inelele lui Newton. Dilatomtru diferențial	61
11. Măsurarea unghiurilor mici prin metode interferențiale	68
12. Interferometrul Michelson – 1	74
13. Interferometrul Michelson – 2	83
14. Interferometrul Michelson – 3	91
15. Interferometrul Rayleigh	96
16. Interferența fasciculelor difractate	101
17. Etalonul Fabry-Perot. Etalonul dublu	112
18. Interferometrul Fabry-Perot. Filtru interferențial	124



19. Proprietățile generale ale unui interferometru Fabry-Perot	141
20. Proprietățile spațiului situat în interiorul interferometrului	148
21. Etalonul Fabry-Perot	154
22. Contrast de fază	158
23. Lame subțiri antireflectante	163
24. Filtre interferențiale	170
25. Interferența a două fascicule obținute prin reflexie.	
Oscilații polarizate liniar și eliptic	178
26. Interferența fasciculelor obținute prin reflexie pe fețele unei prisme	182
27. Interferometrul Michelson. Spectru canelat	187
28. Interferometrul Michelson. Condiția de compensare	195
29. Interferometrul Michelson. Inele formate la infinit	
și observate în prezența unei lame de sticlă	199
30. Studiul unui strat dielectric. Reflexii multiple	205
31. Rețea de difracție prin reflexie	208
32. Rețea de difracție tip rețea de fază	213
33. Experiența lui Abbe	218
34. Interferometrul Fabry-Perot. Analiza structurii spectrale a radiației optice	220
35. Efectul Doppler	223
36. Prisma lui Wollaston	228
37. Obturarea unui fascicul de radiație optică	230
38. Funcția de transfer a unui sistem optic	231

## Interferența a două fascicule de radiație optică

1. – Un dispozitiv Young este constituit dintr-o fantă  $S$ , ce joacă rolul sursei inițiale și două fante  $S_1$  și  $S_2$  care joacă rol de surse secundare. Cele trei fante sunt liniare, perpendiculare la planul figurii și sunt considerate infinit înguste (fig. 1). Fantele  $S_1$  și  $S_2$  se află la distanță egală față de fanta  $S$ , iar  $A$  reprezintă mijlocul segmentului  $S_1S_2 = 2a$ . Se observă tabloul de interferență la distanța  $AB = D$ , care este mare față de distanța  $2a$  dintre cele două surse secundare.

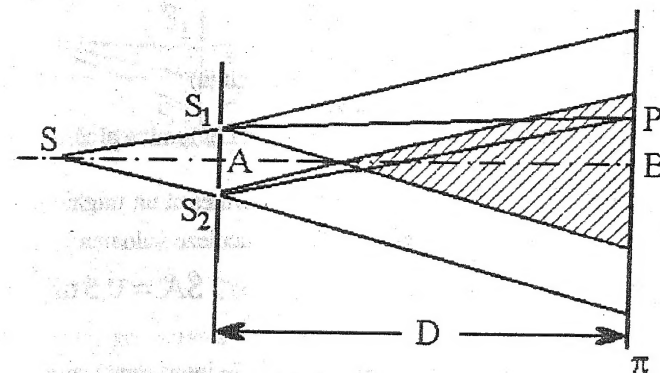


Fig. 1

a) Să se descrie fenomenele implicate în formarea tabloului de interferență observat.

R: Presupunem că fantele  $S_1$  și  $S_2$  sunt foarte înguste. În aceste condiții în spatele ecranului în care sunt practicate fantele se obțin două fascicule difractate. Cu cât lățimea fantelor va fi mai mică, cu atât deschiderea primului maxim de difracție va fi mai mare și cu atât mai mare va fi domeniul de suprapunere al celor două fascicule. Acestea sunt coerente, deci este posibilă observarea figurii de interferență în planul  $\pi$ , în domeniul de suprapunere al fasciculelor.

Să considerăm un punct  $P$  în planul  $\pi$  în interiorul domeniului de interferență și să calculăm diferența de drum ( $\delta$ ) între cele două raze ce pleacă din  $S$  și interferă în punctul  $P$ .

$$\delta = (SS_2 + S_2P) - (SS_1 + S_1P) = S_2P - S_1P$$

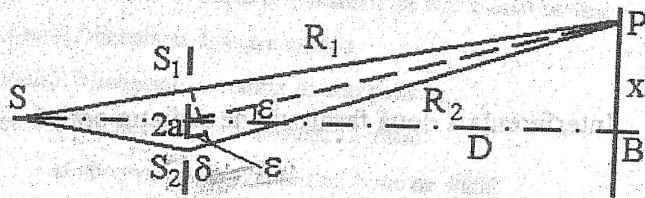


Fig. 2

Dacă diferența de drum  $\delta$  este suficient de mare, iar mărimile  $2a$  și  $x$  sunt mici (fig. 2), atunci, într-o aproximație bună, se poate scrie:

$$\epsilon = \frac{\delta}{2a} = \frac{x}{D}, \text{ de unde: } \delta = \frac{2ax}{D}$$

Se observă că în punctul  $B$ , pentru orice lungime de undă,  $\delta(x=0) = 0$ , deci franja centrală va fi albă dacă sursa  $S$  emite lumină albă.

$$\text{Dacă } \delta = \lambda, \text{ atunci: } x = i = \frac{\lambda D}{2a} \text{ (interfranja)}$$

Să se descrie aspectul tabloului de interferență în lumină albă.

b) În punctul  $B$  se așează un ecran  $\pi$  ce formează un unghi cu direcția  $SB$ . Să se descrie tabloul observat pe ecranul  $\pi$ . Să se calculeze valoarea interfranței  $i'$ . Se consideră:  $S_1S_2 = 2a = 1\text{mm}$ ,  $AB = D = 1\text{m}$ ,  $SA = 0,5\text{m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$  și  $\lambda = 500\text{nm}$ .

R: Conform teoriei generale a fenomenului de interferență suprafețele de egală intensitate sunt niște suprafețe hiperbolice de revoluție ( $\delta = l_1 - l_2 = ct$ ). În planul  $S_1S_2B$  care intersectează aceste suprafețe hiperbolice, se obțin niște hiperbole (fig. 3). Dacă planul de observare  $\pi$  este înclinat, atunci, după cum rezultă și din fig. 3, mărirea interfranței se va modifica. Într-o aproximație suficient de bună se poate scrie:

$$i' = \frac{i}{\sin \alpha} = \frac{\lambda D}{2a \sin \alpha} = 1\text{mm}, \text{ în timp ce: } i = 0,5\text{mm}$$

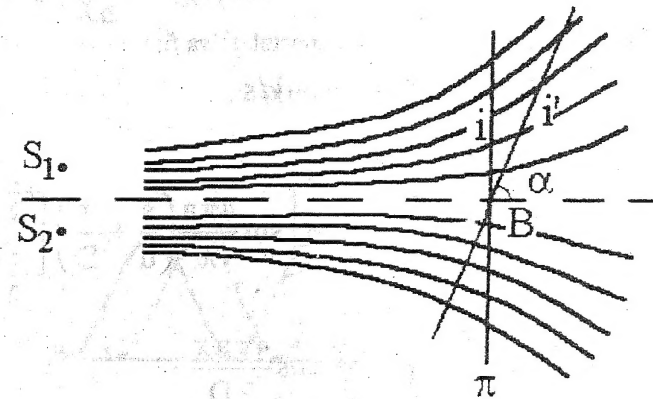


Fig. 3

2. - Menținând fixă lățimea fantelor  $S_1$  și  $S_2$  se mărește progresiv lățimea fantei  $S$ , anterior considerată infinit îngustă, la valoarea finită  $SS' = s$ . Să se descrie tabloul observat dacă lățimea fantei variază în domeniul  $0 \div s$ .

R: Lățimea fantei  $S$ , a cărei valoare este egală cu  $s$  (fig. 4), o divizăm în fante foarte înguste de lățime  $dS$ . Fiecare fantă infinit

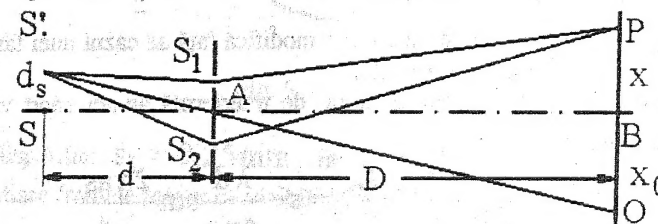


Fig. 4

îngustă, față de vecina ei se comportă ca o sursă incoerentă și-i va corespunde său sistem de interferență, iar interfranțele vor prezenta aceeași lățime  $i = \frac{\lambda D}{2a}$ . Franja

centrală împreună cu sistemul de franje corespunzător fantei infinit înguste din  $S'$  va fi deplasată față de franja centrală corespunzătoare punctului  $S$  cu o mărime egală cu

$BO = x_0 = s \frac{D}{d}$ . În planul  $\pi$  de observare, toate sistemele de franje ce provin de la

toate fantele infinit înguste considerate pe lățimea  $s$  se suprapun. Într-un punct  $P$  vor



interfera două vibrații de egală amplitudine ce provin de la un element  $ds$  al fantei  $S$ , având o diferență de drum:

$$\delta = 2a \left( \frac{s}{d} + \frac{x}{D} \right) \text{ și un defazaj: } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta.$$

Pentru elementul  $ds$  al fantei  $S$ , intensitatea în punctul  $P$  va fi:

$$dI \cong 2A^2(1 + \cos \varphi)ds,$$

iar pentru o fantă de lățime  $s$  se obține:

$$\begin{aligned} \frac{I(x)}{I_0} &= s + \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} \cos \frac{4\pi a}{\lambda} \left( \frac{s}{d} + \frac{x}{D} \right) ds = s + \left[ \sin \frac{4\pi a}{\lambda} \left( \frac{s}{d} + \frac{x}{D} \right) \right]_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} = \\ &= s + \frac{\lambda d}{4\pi a} 2 \sin \frac{4\pi as}{\lambda d} \cos \frac{4\pi ax}{\lambda D} \end{aligned}$$

Din această relație rezultă că pentru o valoare dată  $s$ , intensitatea în planul  $\pi$  prezintă o variație sinusoidală, iar poziția franjelor luminoase este fixată de condițiile:

$$\frac{4\pi ax}{\lambda D} = 2k\pi, \text{ de unde: } x_M = k \frac{\lambda D}{2a} = ki,$$

iar a celor întunecate de:

$$\frac{4\pi ax}{\lambda D} = (2k+1)\pi, \text{ de unde: } x_m = (2k+1) \frac{\lambda D}{4a}$$

Deci poziția franjelor luminoase și întunecate nu se modifică față de cazul unei fante  $S$  infinit înguste, însă intensitatea acestora este altă.

Să analizăm variația vizibilității tabloului de interferență atunci când variază lățimea fantei  $S$ .

$$\frac{I_M}{I_0} = s + \frac{\lambda d}{4\pi a} \sin \frac{2\pi as}{\lambda d} \text{ și } \frac{I_m}{I_0} = s - \frac{\lambda d}{4\pi a} \sin \frac{2\pi as}{\lambda d}$$

Deci:

$$V(s) = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \frac{2\lambda d \sin \frac{2\pi as}{\lambda d}}{s + \frac{\lambda d}{2\pi a} \sin \frac{2\pi as}{\lambda d}}$$

În fig. 5 sunt prezentate sistemele de interferență obținute de la fantele extreme infinit înguste ale fantei  $S$ . Se observă că atunci când valoarea parametrului  $s$  crește, vizibilitatea tabloului de interferență scade și dispare când  $x_0$  este egal cu valoarea unei interfranje  $i$  și, în general, atunci când  $x_0 = ki$ . Aceste dispariții succesive sunt

separate de reapariții din ce în ce mai puțin vizibile, tinzându-se spre o iluminare uniformă. Graficul variației vizibilității tabloului de interferență funcție de valoarea deschiderii  $s$  a fantei  $SS'$  este prezentat în fig. 6. Vizibilitatea franjelor este egală cu

zero pentru:  $\frac{2\pi as}{\lambda d} = k\pi$ , unde  $k \neq 0$  (pentru  $k = 0$  se obține:  $V = 1$ ), deci:

$$s = k \frac{d}{D} i.$$

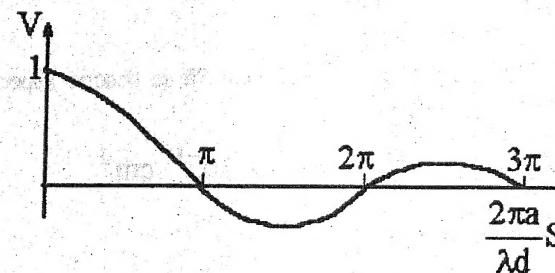
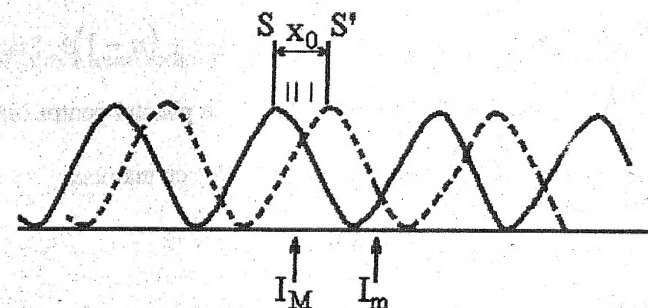


Fig. 5

Fig. 6

Prima dispariție:  $s_1 = 0,25 \text{ mm}$ , iar a doua pentru:  $s_2 = 0,50 \text{ mm}$ . În poziții intermediare franjele reapar cu vizibilități diferite.

3. - Pe traiectoria fasciculului ce provine de la fanta  $S_1$  se introduce o lamă transparentă de grosime  $e$  și indice de refracție  $n$ , a cărui valoare depinde de frecvența radiației utilizate (lungimea de undă):  $n = f(\lambda)$  (fig. 7).

a) Considerăm că sursa optică emite radiație armonică. Ce modificări ale câmpului de interferență introduce lama de sticlă? ( $e = 10^{-3} \text{ cm}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$  și  $n = 1,5$ ).

R: Lama  $L$  va întârzia propagarea radiației optice în primul fascicul datorită introducerii drumului optic suplimentar:  $\delta' = (n-1)e$ .

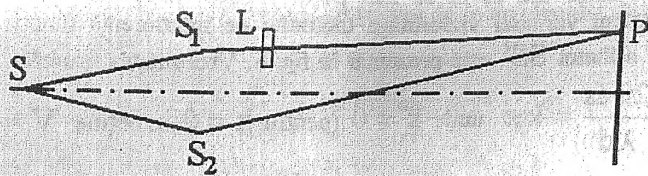


Fig. 7

Diferența de drum:  $\delta = SS_2P - SS_1P = \frac{2ax}{D} - (n-1)e$ . Franja centrală nu se va mai afla în punctul  $x = 0$  (unde  $\delta = 0$ ), ci în punctul pentru care  $\delta' = 0$ , deci:  $x_1 = \frac{D}{2a}(n-1)e$ . Franjele vor fi deplasate în bloc cu mărimea:

$$x_1 = 5 \text{ mm} = 10i.$$

Mărimea interfranței rămâne aceeași:  $i = \frac{D}{2a} = 0,5 \text{ mm}$ .

b) Sursa de radiație optică emite lumină albă. Să se descrie aspectul franjei centrale. Se va considera:

$$n = f(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}, \text{ unde } B = 10^{-10} \text{ cm}^2.$$

R: Deoarece poziția franjei centrale:

$$\delta = 0, \quad x_1 = \frac{D}{2a}(n-1)e = f(\lambda),$$

depinde de lungimea de undă, în lumină albă nu se mai poate considera că franja centrală are culoarea albă. Pozițiile franjelor centrale corespunzătoare frecvențelor diferite nu mai coincid.

Considerând expresia ordinului de interferență:  $k = \frac{\delta}{\lambda}$ , să găsim poziția punctului P pentru care ordinul de interferență nu depinde de lungimea de undă. Această poziție corespunde condiției:

$$\frac{dk}{d\lambda} = \frac{\lambda d\delta - \delta d\lambda}{\lambda^2} = 0,$$

de unde rezultă:  $\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{\delta}{\lambda} = k$ . Prin urmare:

$$k = \frac{d\delta}{d\lambda} = -e \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2Be}{\lambda^3} = 1,14$$

Poziția punctului P este dată de relația:

$$\delta = k\lambda = \frac{2Be}{\lambda^3} \lambda = \frac{2ax'}{D} - (n-1)e, \text{ de unde:}$$

$$x' = \frac{De}{2a} \left( n-1 + \frac{2B}{\lambda^2} \right)$$

În acest punct toate radiațiile prezintă aceeași diferență de fază.



### Oglinzile lui Fresnel. Spectru canelat.

1. - Un sistem de oglinzi Fresnel este reglat astfel încât cele două margini rectangulare ce vin în contact coincid perfect. Se notează cu  $a$  și  $b$  distanța de la marginile comune ale oglinzilor la fanta de iluminare  $S$ , respectiv la ecranul de observare  $E$ , iar cu  $\theta$  - suplimentul unghiului dintre oglinzi. Fanta infinit îngustă  $S$  este paralelă cu muchia de intersecție a celor două oglinzi și perpendiculară la planul fig. 8.

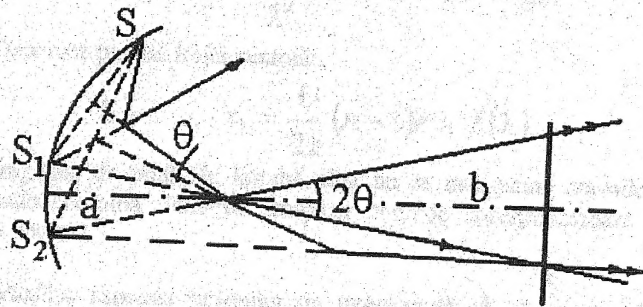


Fig. 8

Să se calculeze numărul de franje ce apar în domeniul de suprapunere a celor două fascicule ( $a = b = 1\text{m}$ ,  $\lambda = 550\text{nm}$ ). Să se calculeze valoarea unghiului  $\theta$  pentru ca pe ecranul de observare să apară 25 franje.

R: Fie  $S_1$  și  $S_2$  imaginile virtuale ale sursei  $S$  formate în cele două oglinzi. Din fig. 8 rezultă:

$$\angle S_1AS_2 = 2\theta, \text{ deci: } \overline{S_1S_2} \cong 2a\theta.$$

Cele două fascicule (care par a proveni din imaginile virtuale  $S_1$  și  $S_2$ ) se suprapun în interiorul unghiului diedru cu vârful în  $A$  și a cărui deschidere este egală cu  $2\theta$ . Lățimea câmpului de interferență la distanța  $b$  de punctul  $A$  este egală cu  $2\theta b$ . Valoarea interfranței la distanța  $D = a + b$  de cele două surse coerente  $S_1$  și  $S_2$  este:

$$i = \frac{\lambda D}{S_1S_2} = \frac{\lambda}{2\theta} \frac{a+b}{a}.$$

Franja centrală este luminoasă. Numărul de franje luminoase, de o parte sau de alta a franjei centrale, este egal cu:

$$\frac{\theta b}{i} = 2\theta^2 \frac{ab}{(a+b)\lambda},$$

iar numărul total este:

$$n = 4\theta^2 \frac{ab}{(a+b)\lambda} + 1$$

(se adaugă o frajă care corespunde celei centrale).

Valoarea unghiului  $\theta$  care corespunde la  $n = 25$ :

$$4\theta^2 \frac{ab}{(a+b)\lambda} + 1 = 25,$$

de unde:  $\theta = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 8'50''$ . Lățimea unei jumătăți a câmpului de interferență este egală cu:

$$\theta b = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot 10^3 \text{ mm} = 2,57 \text{ mm}.$$

2. - Se iluminează fanta  $S$  cu lumină albă, iar în planul  $E$  se plasează fanta  $F$  a unui spectroscop cu rețea de difracție în așa fel încât aceasta este normală la direcția franjelor de interferență. Să se explice tabloul observat în spectroscop. Înălțimea fantei spectroscopului se consideră mai mare decât limitele domeniului de interferență obținut pe ecranul  $E$ . Calculele se vor face pentru  $a = b = 1\text{m}$ ; rețeaua are  $200 \text{ tr/mm}$ , iar distanța focală a lentilei colimator și a lunetei este egală cu  $f = 10\text{cm}$ ; se va considera spectrul de ordinul I, iar limitele spectrului vizibil sunt:  $\lambda = (400 \div 800)\text{nm}$ .

R: Se lucrează în lumină albă. Pe ecranul  $E$ , fiecare radiație armonică  $\lambda$  formează franje luminoase sub forma unor drepte paralele și echidistante. Distanța dintre acestea, adică valoarea interfranței  $i$ , este proporțională cu  $\lambda$ , deci  $i_\lambda = B\lambda$ . Franja centrală este albă. Următoarele franje sunt irizate: violet în interior și roșu în exterior (fig. 9). Cu cât ne deplasăm față de franja centrală, franjele de diferite lungimi

spectrele  $F_1, F'_1; F_2, F'_2; F_3, F'_3; \dots$  (fig. 10). Să ataşăm tabloului observat în lunetă

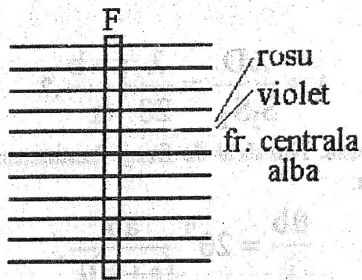


Fig. 9

un sistem de coordonate:  $x$  - de-a lungul spectrului și  $y$  - de-a lungul imaginii fantei. Imaginea  $F_0$  va reproduce aspectul fantei  $F$ , iar mărimea va depinde de grosimea spectroscopului. Să analizăm spectrul de ordinul întâi  $F_1$ . Acesta este constituit din imaginile  $F_{1\lambda}$  ale fantei de intrare, corespunzătoare radiației armonice  $\lambda$ . Aceste imagini, față de imaginea centrală  $F_0$ , sunt deplasate proporțional cu  $\lambda$  (fig. 11) (de la teoria rețelelor de difracție):

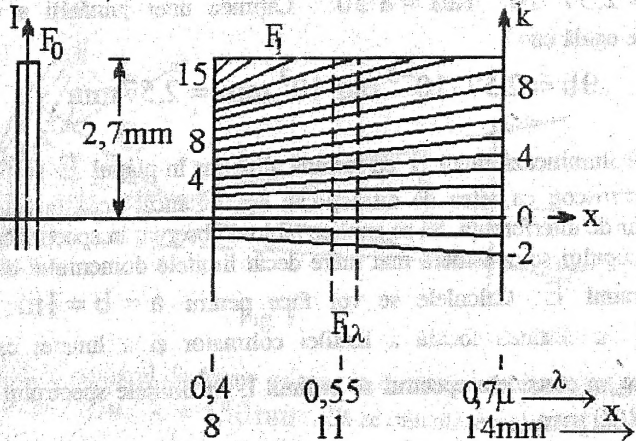


Fig. 10

$$d \sin \alpha = k \lambda, \text{ deci: } \alpha \cong \frac{k}{d} \lambda \text{ (d - constanta rețelei), de unde:}$$

$$x = f \alpha = \frac{fk}{d} \lambda = C \lambda.$$

În interiorul fiecărei imagini  $F_1$  există "puncte luminoase" separate de "puncte întunecate". Distanța dintre "punctele luminoase" reprezintă interfranja  $i_\lambda = B\lambda$ . Privit în ansamblu spectrul este brăzdat de niște benzi întunecate, care, cu cât ne deplasăm spre marginea câmpului de interferență, prezintă înclinări din ce în ce mai mari față de axa  $X$  (fig. 10).

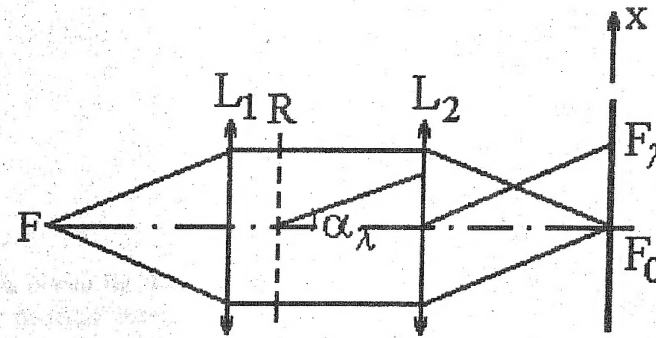


Fig. 11

În interiorul acestui spectru să considerăm radiația de lungime de undă  $\lambda'$ , deci:  $x' = C\lambda'$ , iar în interiorul unei benzi de ordinul  $k$ :

$$y' = k i_{\lambda'} = k B \lambda', \text{ prin urmare: } \frac{y}{x} = k \frac{B}{i} \lambda.$$

Deci atât benzile luminoase (descompuse în spectru) cât și canelurile întunecate reprezintă drepte a căror pantă este proporțională cu ordinul de interferență.

Să analizăm tabloul observat în luneta spectrometrului. Radiația  $\lambda = 400 \text{ nm}$  va fi dispusă la  $8 \text{ mm}$  față de imaginea centrală  $F_0$ :

$$x = f \alpha = \frac{fk}{d} \lambda = 8 \text{ mm}.$$

Numărul de benzi luminoase: pentru  $\lambda = 550 \text{ nm}$ , de o parte a franjei centrale s-au găsit 12 benzi luminoase. Diferența de drum optic corespunzătoare marginii câmpului de interferență este:

$$\delta_M = 12.550 \text{ nm} = 6600 \text{ nm}.$$

Această diferență de drum optic, pentru  $\lambda = 400 \text{ nm}$ , permite obținerea a 16 benzi luminoase ( $k = \frac{\delta}{\lambda} = 16,5$ ), iar pentru  $\lambda = 700 \text{ nm}$  se obțin 9 benzi luminoase.



Deoarece grosimetul spectrometrului  $G = \frac{f_2}{f_1} = 1$ , înălțimea totală a

spectrului este egală cu 5,14 mm.

Să se descrie tabloul observat în luneta spectroscopului dacă elementul de descompunere a radiației optice este o prismă.

### Oglinda lui Lloyd

În planul fig. 12 segmentul  $AB = 40$  cm reprezintă urma feții superioare a unei lame de sticlă. Această față dispusă orizontal, este perfect plană și reflectizantă; o vom numi "oglină M", iar în problemă se admite că factorul ei de reflexie, în condițiile de utilizare (incidență aproape razantă), este egal cu unu. O sursă punctiformă de radiație optică este plasată la 4 m de marginea A și la 1 cm deasupra planului oglinzii M. Prin intermediul unei lupe, în planul vertical ce trece prin marginea B, se observă franjele tabloului de interferență.

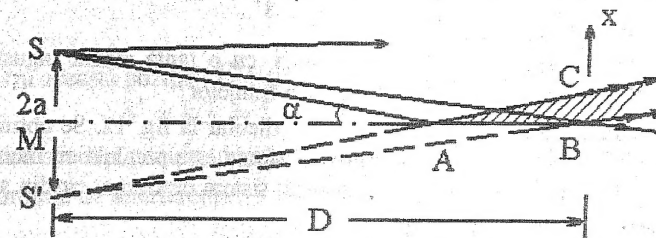


Fig. 12

1. - Să se explice modul de formarea a acestor franje. De ce franja de ordinul zero este întunecată?

R: Franjele sunt rezultatul interferenței fascicului direct ce pleacă din S și a fascicului obținut prin reflexie, adică cel ce pare a proveni din sursa virtuală S' (fig. 12). Franja de ordin zero este întunecată deoarece la reflexie pe oglindă, din motive fizice, se introduce o diferență de drum suplimentară egală cu  $\lambda/2$ .

2. - Să se calculeze limitele câmpului de interferență în planul vertical ce trece prin B.

$$R: \tan \alpha = \frac{MS}{MA} = \frac{CB}{AB}; \quad x_M = CB = 1 \text{ mm}.$$

3. - Să se calculeze valoarea interfranjei și numărul de franje luminoase conținute de tabloul de interferență, dacă se utilizează radiația armonică  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

$$R: \quad i = \frac{D}{2a} \lambda = 0,11 \text{ mm}.$$

Numărul de interfranje:  $\frac{BC}{i} = \frac{1}{0,11} = 9 \frac{1}{100}$ , deci se obțin 9 franje negre plus franja centrală neagră, despărțite de 9 franje luminoase.

4. - Punctul sursă S se îndepărtează la infinit pe direcția AS. Să se analizeze cum se modifică interfranja?

$$R: \quad i = \frac{AB + AM}{SS'} \lambda = \frac{\frac{AB}{AM} + 1}{\frac{SS'}{AM}} \lambda \rightarrow i_m = \frac{\lambda}{2\alpha} = 0,1 \text{ mm}.$$

(valoarea interfranjei se micșorează și tinde la valoarea  $i_m$ ).

5. - Se înlocuiește sursa punctiformă S cu o fantă infinit îngustă F. Cum trebuie orientată fanta pentru a crește intensitatea franjelor?

R: Fanta trebuie să fie orientată perpendicular la fig. 12. Se obțin franje mult mai strălucitoare. Fiind perpendiculară la figură, fanta este paralelă cu muchia oglinzii. Fiecărui punct al fantei îi va corespunde propriul sistem de franje, iar din suprapunerea acestora va rezulta creșterea intensității.

6. - Se iluminează fanta cu lumină albă. Care este aspectul câmpului în vecinătatea punctului B?

R: Franja centrală va fi neagră (acromatică) deoarece pentru fiecare frecvență, la reflexie, se introduce  $\frac{\lambda}{2}$ . Deoarece:  $i = \frac{D}{2a} \lambda$ , prima franjă luminoasă va fi irizată în violet spre interior și roșu spre exterior. În ceea ce privește următoarele franje, cu cât crește ordinul de interferență începe să se manifeste suprapunerea franjelor de diferite ordine și de diferite frecvențe. Culorile încep să dispară și apare albul de ordin superior (fig. 13).

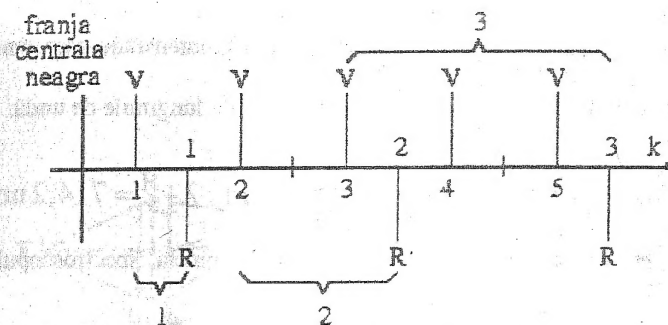


Fig. 13

7. - Într-un plan vertical ce trece prin punctul B, deasupra acestuia, se așează, paralel cu franjele, fanta  $F'$  a unui spectroscop; distanța  $BF' = 0,55 \text{ mm}$ . Să se calculeze lungimea de undă a canelurilor întunecate ce apar în spectrul vizibil  $\lambda = (400 \div 800) \text{ nm}$ .

R: Considerăm fanta spectroscopului infinit îngustă. Să calculăm cum apare interferența diferitelor radiații în locul unde este plasată fanta  $F'$ . Valoarea interfranjei pentru radiația  $\lambda = 500 \text{ nm}$  este  $i_g = \frac{D}{2a} \lambda = 0,11 \text{ mm}$ . Pe intervalul

$BF' = 0,55 \text{ mm}$  există:  $n = \frac{BF'}{i_g} = 5$  franje negre exceptând franja centrală neagră.

Pentru această poziție ( $F'$ ) diferența de drum este egală cu:

$$\delta' = k \lambda = 5 \cdot 500 \text{ nm} = 2500 \text{ nm}.$$

Pentru aceeași poziție, deci pentru aceeași diferență de drum, pentru  $\lambda_v$  va corespunde ordinul de interferență:

$$\lambda_v = 400 \text{ nm}, \quad k = \frac{2500 \text{ nm}}{400 \text{ nm}} = 6 \frac{1}{4},$$

iar pentru:  $\lambda_v = 800 \text{ nm}, \quad k = 3 \frac{1}{8},$

Între aceste limite extreme, în poziția  $F'$ , corespunzător ordinilor de interferență  $k = 4, 5, 6$ , trei radiații vor prezenta minim de interferență (deci vor lipsi din spectrul observat în spectroscop).

Din relația:  $\delta = k \lambda$  se poate calcula valoarea acestor lungimi de undă:

$$\lambda_6 = \frac{\delta}{k} = \frac{2500}{6} = 416,6 \text{ nm}; \quad \lambda_5 = 500 \text{ nm}; \quad \lambda_4 = 625 \text{ nm}.$$



ordinelor de interferență:  $5\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$  care corespund la lungimile de undă:

$$\lambda_{5,5} = \frac{2500}{5,5} = 454,5 \text{ nm}, \lambda_{4,5} = 555,5 \text{ nm}, \lambda_{3,5} = 714,2 \text{ nm}.$$

Distribuția intensității în tabloul observat în luneta spectroscopului este prezentată în fig. 14.

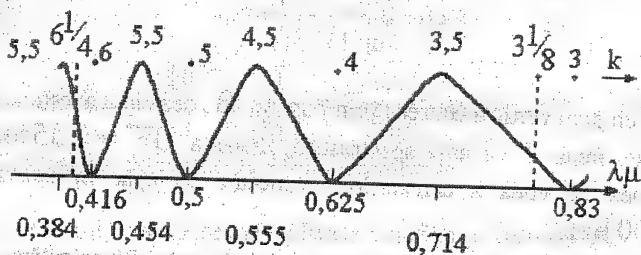


Fig. 14

8. - În locul fantei  $F$  se așează fanta unui spectrograf cu rețea, care este iluminată cu lumină albă. Rețeaua  $R$  are  $25 \text{ tr/mm}$  și este dispusă normal pe  $FA$ , între două lentile  $L_1$  și  $L_2$  a căror distanță focală este egală cu  $50 \text{ cm}$ , iar distanța  $L_1 L_2$  este neglijabilă. O diafragmă  $D$  se află la  $3 \text{ m}$  față de marginea  $A$  și este traversată numai de razele difractate ale spectrului de primul ordin care se formează deasupra planului orizontal al oglinzii  $M$ . Deschiderea lentilelor este suficientă pentru ca razele tuturor fasciculelor armonice difractate să acopere în întregime oglinda  $M$ . Să se descrie aspectul câmpului de interferență.

**R:** Diafragma D limitează spectrul de ordinul întâi: violet în partea inferioară și roșu în partea superioară. Se poate considera că fiecare punct al fantei este o sursă de radiație armonică și totodată sursă de lumină pentru oglinda Lloyd. Să calculăm poziția acestor surse armonice față de axa FA.

Din relația fundamentală a rețelei de difracție:

$$\sin i + \sin i' = kn \lambda,$$

(în cazul de față:  $i' = 0$ ,  $k = 1$ ), se obține:  $\sin i = n\lambda$  (pentru  $\lambda = 500 \text{ nm}$  se obține:  $\sin i = 12,5 \cdot 10^{-3}$ , deci se poate aproxima  $\sin i \cong i$ ). Din fig. 15 rezultă:

$$a = f \tan i \cong f n \lambda,$$

deci mărimea  $a$  este proporțională cu lungimea de undă.

Să calculăm poziția  $x$  a unui maxim de intensitate de ordinul  $k$  în planul de interferență ce trece prin  $B$ . Diferența de drum este:

$$\delta = \frac{x}{D} 2a = \frac{x}{D} 2f n \lambda.$$

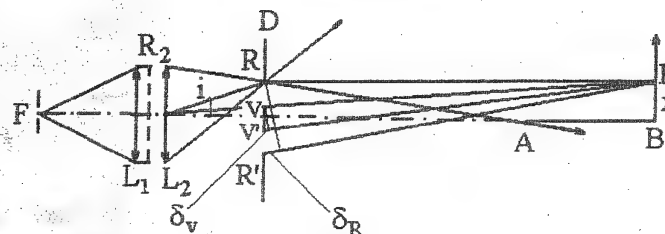


Fig. 15

Pentru un punct P din tabloul de interferență, diferența de drum a radiațiilor de diferite frecvențe ce provin de la sursele armonice dispuse pe deschiderea fantei este proporțională cu  $\lambda$ .

$$\delta = \frac{x}{D} 2a = \frac{x}{D} 2 \sin \lambda = k \lambda, \text{ de unde: } x = \frac{kD}{2 \sin \lambda},$$

adică poziția unui maxim de interferență nu depinde de lungimea de undă. Valoarea interfranței este:

$$i = \frac{D}{2f_n} = 0,136 \text{ mm}.$$

Se obțin franje acromatizate (albe – ne irizate pe margini).

9. - Se consideră montajul anterior, dar cu două fante înfinit înguste și paralele  $S$  și  $S'$  care constituie surse necoerente, cu aceeași valoare a intensității. Fantele se află în același plan, dispus vertical față de oglindă și situate la distanța  $a_0$  și  $a_0 + \varepsilon$  față de planul oglinzii. Fantele sunt iluminate cu radiația armonică  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

Să se descrie aspectul câmpului de interferență.

**R:** Fiecare din sursele  $S$  și  $S'$  crează propriul lor sistem de interferențe. Cele două sisteme se suprapun în planul de observare, iar intensitățile se adună. În punctul  $B$  se va obține o franjă întunecată. Să analizăm suprapunerea franjelor.

$$i = \frac{D}{2a_0} \lambda \gg i' = \frac{D}{2(a_0 + \varepsilon)} \lambda.$$

Cu cât ne depărtăm de franja centrală, vizibilitatea franjelor se micșorează până când se obține o iluminare uniformă în jurul poziției când o franjă luminoasă a unui sistem se suprapune peste o franjă întunecată a celui alt sistem; apoi vizibilitatea crește din nou, devenind maximă când o franjă luminoasă a lui  $S$  coincide cu o franjă luminoasă a lui  $S'$  (fig. 16). Fenomenul este periodic.

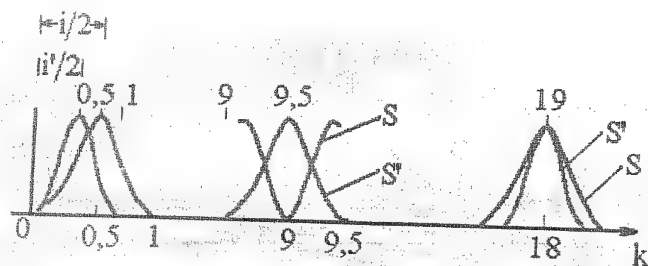


Fig. 16

b) Să se determine cea mai mică valoare a lui  $\varepsilon$  pentru care există o coincidență între a 10-a franjă neagră (considerând și franja centrală) dată de fanta  $S$  și o franjă luminoasă dată de fanta  $S'$ .

R: Se alege valoarea  $\varepsilon$  în așa fel încât în întreg câmpul de interferență să putem constata numai o diminuare a clarității urmată de o iluminare uniformă. A 10-a franjă neagră corespunzătoare fantei  $S$  se află față de oglindă la o distanță de:

$$x = 9i = 9 \frac{D}{2a_0} \lambda$$

(se consideră valoarea 9 deoarece franja centrală este notată cu zero). Pentru a 9-a franjă luminoasă, corespunzătoare sursei  $S'$ , se obține:

$$x = 9,5i' = 9,5 \frac{D}{2(a_0 + \varepsilon)} \lambda$$

Pentru a obține coincidența este necesar ca:

$$9 \frac{D}{2a_0} \lambda = \frac{19}{2} \frac{D}{2(a_0 + \varepsilon)} \lambda, \text{ deci: } \varepsilon = \frac{a_0}{2 \cdot 9} = 0,555 \text{ mm}$$

Dispariția franjelor în tabloul de interferență (deci iluminare uniformă) se va obține dacă:

$$x = m \frac{D}{2a_0} \lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{D}{2(a_0 + \varepsilon)} \lambda, \text{ unde: } n \geq m; p = n - m \geq 0,$$

negru(S)                      iluminat(S')

de unde:

$$\frac{2m}{a_0} = \frac{2n+1}{a_0 + \varepsilon} = \frac{2(n-m)+1}{\varepsilon}, \text{ deci: } \varepsilon = \frac{2p+1}{2m} a_0,$$

pentru  $n = m$ ,  $p = 0$ , deci:  $\varepsilon = \frac{a_0}{2m}$  (în cazul datelor problemei numărul  $m$  nu poate fi mai mic decât 9).

c) Care este legea de repartire a iluminărilor pentru fiecare din cele două sisteme de franje date de sursele  $S$  și  $S'$ ?

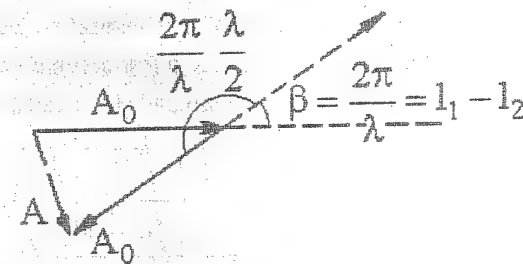


Fig. 17

R: Pentru sursa  $S$  variația intensității în planul ce trece prin punctul  $B$  este dată de compunerea amplitudinilor radiației ce provine de la sursa  $S$  și imaginea acesteia  $S'$ . Într-un punct de coordonată  $x$  a acestui plan se vor compune vectorii  $A_0$  defazați cu unghiul  $\varphi$ , care depinde de poziția  $x$  (se consideră și diferența de drum suplimentară  $\lambda/2$  introdusă la reflexie) (fig. 17).

Unghiul de defazaj: 
$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left( l_1 - l_2 + \frac{\lambda}{2} \right) = \frac{2\pi x}{i}$$

Deci: 
$$A^2 = A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2 \cos \varphi = 4A_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

De unde: 
$$\left( \frac{I}{I_0} \right)_S = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

unde: 
$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2ax}{D} = \frac{2\pi x}{i}$$

Pentru radiația ce provine de la sursa  $S'$  distribuția intensității este dată de aceeași

relație, iar 
$$\varphi' = \frac{2\pi x}{i'}$$

d) Să se determine distribuția iluminării în planul de interferență ce trece prin punctul  $B$ , dacă cele două fante sunt dispuse în așa fel încât  $\varepsilon = a_0$ .

R: Pentru fanta  $S$ : 
$$i_S = \frac{D}{2a} \lambda; \left( \frac{I}{I_0} \right)_S = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 4 \sin^2 \frac{2\pi x}{i};$$



Pentru fanta  $S' : i_{S'} = \frac{D}{4a} \lambda = \frac{i_S}{2} \cdot \left( \frac{I}{I_0} \right)_{S'} = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 4 \sin^2 \frac{\pi x}{i'}$

Pentru a determina distribuția iluminării se realizează tabelul următor ale cărui date sunt prezentate în fig. 18, iar curba  $I_{rez}/I_0$  a fost obținută prin adunare grafică. Se va efectua aceeași operație folosind unul din programele de calcul din laborator.

	$\left( \frac{I}{I_0} \right)_S$	$x$	$\left( \frac{I}{I_0} \right)_{S'}$	$x$
$\pi/12$	0,067	$i/12$	$1/4$	$i'/6$
$\pi/6$	$1/4$	$i/6$	$3/4$	$i'/3$
$\pi/4$	$1/2$	$i/4$	$1$	$i'/2$
$\pi/3$	$3/4$	$i/3$	$3/4$	$2i'/3$
$5\pi/12$	0,92	$5i/12$	$1/4$	$5i'/6$
$\pi/2$	$1$	$i/2$	$0$	$i'$
$7\pi/12$	0,92	$7i/12$		
$2\pi/3$	$3/4$	$2i/3$		
$3\pi/4$	$1/2$	$3i/4$		
$5\pi/6$	$1/4$	$5i/6$		
	$0$	$i$		

10. - Revenim la montajul cu o singură fantă  $S$  infinit îngustă iluminată cu radiație armonică. Se fixează prima franjă neagră, vecină cu franja centrală (ordinul ei de interferență este  $3/2$ ). Se deschide apoi fanta spre "în sus", lărgimea ei este  $s$  și este iluminată uniform. Să se determine lărgimea minimă a fantei, pentru care iluminarea în punctul unde era franja neagră devine egală cu iluminarea medie a câmpului. Aceeași problemă dacă se fixează franja neagră de ordinul:  $k + \frac{1}{2}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

R: Să descompunem fanta de lătime finită într-o infinitate de fante elementare, paralele, de aceeași lătime  $d a$  și situate la distanța  $a$  de planul oglinzii (fig. 19); fiecărei fante elementare îi corespunde propriul sistem de franje de interferență. Iluminarea într-un punct al câmpului de interferență va fi dată de suma iluminărilor

corespunzătoare fiecărui sistem de franje. Pentru o fantă elementară, în punctul  $M$ , diferența de drum optic este:  $\delta' = \frac{2ax}{D}$ . Amplitudinea rezultantă (pe unitate de lungime):

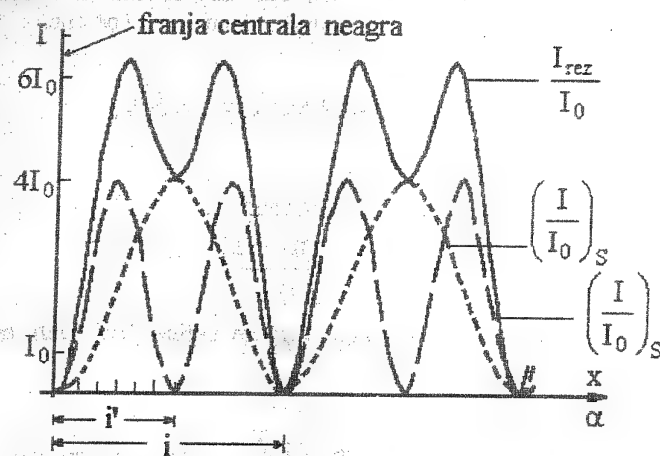


Fig. 18

$$A = 2\sqrt{I_1 d a} \sin \frac{\beta}{2}; \text{ unde: } \frac{\beta}{2} = \frac{2\pi ax}{D}, \text{ deci: } dI = 4I_1 \sin^2 \frac{2\pi ax}{D\lambda} da.$$

Intensitatea în punctul  $M$  determinată de întreaga deschidere ( $s$ ) a fantei este:

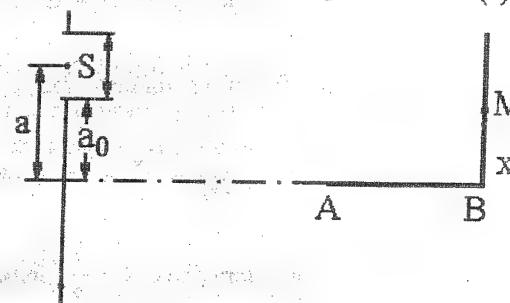


Fig. 19

$$I = 2I_1 \int_{a_0}^{a_0+s} \left( 1 - \cos \frac{4\pi ax}{D\lambda} \right) da = 2I_1 s - 2I_1 \frac{D\lambda}{4\pi x} \sin \frac{4\pi ax}{D\lambda} \Big|_{a_0}^{a_0+s} =$$

$$= 2I_1 s \left[ 1 - \frac{D\lambda}{2\pi s x} \sin \frac{2\pi s x}{D\lambda} \cos \frac{2\pi s x(2a_0+s)}{D\lambda} \right]$$

(intensitatea în planul de interferență funcție de poziția punctului  $M$  și de mărimea deschiderii fantei). Se observă că atunci când  $s \rightarrow 0$  se obține  $I \rightarrow 0$ , iar când  $x \rightarrow 0$ , se obține  $I \rightarrow 0$ , oricare ar fi valoarea mărării  $s$ .

Considerăm că iluminarea medie este cea care rezultă din suprapunerea (sumarea) fasciculelor incident și reflectat pe oglindă, presupuse incoerente.

Intensitatea fascicului incident:  $I_1 s$

Intensitatea fascicului reflectat (considerând  $r = 1$ ):  $I_1 s$ ,

Deci:

$$\bar{I} = 2I_1 s.$$

Problema cere ca:  $I = \bar{I}$ , deci trebuie satisfăcută condiția:

$$\sin \frac{2\pi s x}{D\lambda} \cos \frac{2\pi s x(a_0 + s)}{D\lambda} = 0.$$

Considerăm poziția franjei negre de ordinul  $k$  care se obține dacă fanta este infinit îngustă și se află în poziția  $a_0$ :

$$x = ki = k \frac{D}{2a_0} \lambda.$$

Pentru această valoare a poziției  $x$ , condiția de mai sus devine:

$$\sin \frac{k\pi s}{a_0} \cos \frac{k\pi s}{a_0} = 0, \text{ sau: } \frac{1}{2} \sin \frac{2k\pi s}{a_0} = 0.$$

Din această relație se obține valoarea minimă a lățimii fantei. Pentru prima franjă neagră  $k = 1$  (franja centrală neagră este  $k = 0$ ):

$$\frac{2\pi s}{a_0} = 0 \text{ (caz banal: } s = 0), \pi \text{ (} s \text{ minim), } 2\pi, \dots$$

Deci:

$$s_{\min} = \frac{a_0}{2}, s = a_0, \dots$$

Pentru cazurile:  $k = 2, 3, 4, \dots$  (ordinul de interferență  $k + \frac{1}{2}$ , unde termenul  $1/2$  apare de la diferența de drum suplimentară  $\lambda/2$ ) se obține:

$$s = \frac{a_0}{2k}.$$

### Bîprisma lui Fresnel

Două prisme, a căror unghi la vârf este foarte mic  $\alpha = 20'$ , sunt unite prin bazele lor și iluminate prin intermediul unei fante situate pe axa optică a sistemului la distanța  $a = 10 \text{ cm}$  de prisme, de o sursă de radiație optică. Franjele de interferență se observă pe un ecran perpendicular la axa optică, situat la distanța  $L = 3 \text{ m}$  față de fantă (fig. 20). Indicele de refracție al materialului prisme depinde de lungimea de undă

conform relației:  $n = A + \frac{b}{\lambda^2}$ , unde  $b = 10^{-10} \text{ cm}^2$ , iar valoarea indicelui de refracție pentru  $\lambda = 500 \text{ nm}$  este  $n = 1,5$ .

1. - Să se calculeze numărul de franje luminoase și întunecate ce se formează în tabloul de interferență dacă fanta este iluminată cu câmpul armonic  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Să se descrie tabloul de interferență dacă fanta este iluminată cu lumină albă.

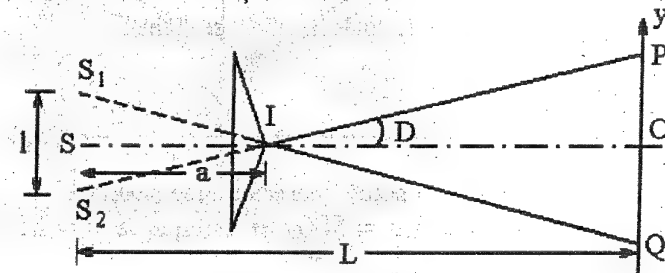


Fig. 20



R: Pentru început să considerăm că valoarea grosimii bazei prismelor este neglijabil de mică. De asemenea considerăm că prismele sunt stigmatice, iar imaginile  $S_1$  și  $S_2$  se află față de prismă la aceeași distanță ca și fanta  $S$ . Intr-o aproximație foarte bună se poate scrie:

$$S_1 I = S I = S_2 I = a.$$

Deoarece unghiul  $\alpha = 20' = \frac{\pi}{3 \cdot 180} = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$  este foarte mic, din relația:

$$n = \frac{\sin \frac{\alpha + D}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ se obține: } D = (n-1)\alpha = \frac{\pi}{6 \cdot 180}; \text{ distanța dintre sursele virtuale este:}$$

$$l = S_1 S_2 = 2aD = 2a(n-1)\alpha,$$

valoarea interfranței:  $i = \frac{L\lambda}{2a(n-1)\alpha} = 2,58 \text{ mm},$

iar valoarea semilățimii câmpului de interferență este:

$$OP = (L-a)D = (L-a)(n-1)\alpha = 8,43 \text{ mm}.$$

Numărul de franje dispuse pe acest interval este egal cu:  $\frac{OP}{i} = 3,26$ , iar numărul total de franje luminoase este:

$$2 \left\lfloor \frac{2a(L-a)(n-1)^2 \alpha^2}{L\lambda} \right\rfloor + 1 (\text{franja centrală}) = 7,$$

respectiv 6 franje întunecate.

Dacă valoarea parametrului  $L$  tinde la infinit, se obține:

$$\frac{OP}{i} = \frac{2aL \left(1 - \frac{a}{L}\right) (n-1)^2 \alpha^2}{L\lambda} \rightarrow \frac{2a(n-1)^2 \alpha^2}{\lambda} \approx 3,4,$$

deci numărul de franje luminoase, respectiv întunecate nu se modifică.

In lumină albă: deoarece la  $\lambda = 500 \text{ nm}$  corespunde  $n = 1,5$ , din relația

$$n = A + \frac{b}{\lambda^2}, \text{ unde } b = 10^{-10} \text{ cm}^2, \text{ se obține } A = 1,1, \text{ de unde:}$$

$$\Delta n = n_V - n_R = 1,162 - 1,115 = 0,047$$

(deci dispersia materialului are un rol neglijabil).

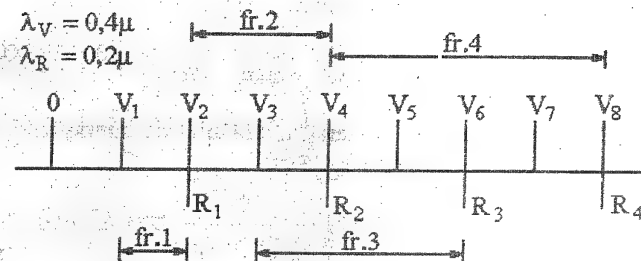


Fig. 21

În aceste condiții interfranța:  $i = \frac{L\lambda}{2a(n-1)\alpha}$  este proporțională cu lungimea de undă. Franja centrală este albă. Marginile următoarelor franje sunt irizate în interior în violet iar spre exterior în roșu (fig. 21).

Dacă  $\lambda_V = 400 \text{ nm}$  și  $\lambda_R = 800 \text{ nm}$  atunci cea de a doua franjă atinge pe prima, și anume  $\lambda_{R1}$  coincide cu  $\lambda_{V2}$ . Cea de a doua franjă este și mai puternic irizată față de prima. Cea de a treia franjă, care este și mai irizată, se suprapune peste a doua. Pentru franje de ordin superior suprapunerea este din ce în ce mai puternică și se obține albul de ordin superior.

2. - Cele două prismele nu sunt riguros identice: unghiul la vârf al prisme superioare este  $\alpha_1 = 19'$ , iar pentru cealaltă  $\alpha_2 = 21'$ . Să se analizeze dacă fenomenul diferă de cel descris la punctul anterior.

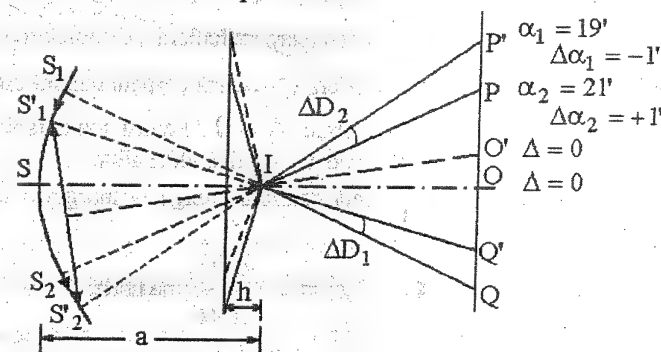


Fig. 22

R: Deoarece valoarea  $\alpha_1$  se micșorează, imaginea  $S_1$  se deplasează pe un cerc cu raza  $a + (n-1)h$ , rotindu-se cu unghiul  $\Delta D_1 = (n-1)\Delta\alpha_1$ ; valoarea unghiului  $\alpha_2$  crește, imaginea  $S_2$  se deplasează pe același cerc cu unghiul

$\Delta D_2 = (n-1)\Delta\alpha_2$  (fig. 22). Planul pentru care  $\Delta = l_2 - l_1 = 0$  se rotește în jurul punctului I cu unghiul  $(n-1)\Delta\alpha$ , unde  $\Delta\alpha = \frac{\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2}{2}$  (franja centrală), însă nu se modifică aspectul general al tabloului de interferență. Deplasarea franjei centrale în planul de observare este egală cu:

$$OO' \cong (L-a)(n-1)\Delta\alpha = 2900 \frac{\pi}{2 \cdot 180 \cdot 60} \cong 0,42 \text{ mm} \cong \frac{1}{6}$$

3. Se utilizează o sursă de lumină albă. Cele două prisme prezintă același unghi  $\alpha$ , dar au grosimi diferite la bază  $h_1 > h_2$ . Să se calculeze diferența de grosime tolerabilă a bazei prismelor pentru ca raza corespunzătoare ordinului de interferență zero să rămână în câmpul de interferență. Să se descrie aspectul câmpului de interferență.

R: Pentru o radiație armonică oarecare  $\lambda$ , dacă crește grosimea  $h_1$  la bază, imaginea  $S_1$  se deplasează pe direcția  $S_1IQ$  cu mărimea:  $(n-1)\Delta h$  (în primă aproximație, în porțiunea suplimentară de prismă egală cu  $\Delta h$ , considerăm parcursul oblic)(fig. 23). Unghiul  $D$  rămâne neschimbat. Segmentul  $S_1'S_2$  se rotește în jurul punctului  $S_2$  cu unghiul:

$$\angle S_1S_2S_1' \cong \frac{S_1S_1'}{S_1S_2} = \frac{\Delta h(n-1)}{2a\alpha(n-1)} = \frac{\Delta h}{2a\alpha}$$

unghi ce este independent de  $\lambda$ . Perpendiculara pe mijlocul segmentului  $S_1S_2$  se rotește cu același unghi  $S_1S_2S_1'$ , rămânând perpendiculară pe mijlocul segmentului  $S_1'S_2$ . În primă aproximație se poate considera că această perpendiculară este conținută în planul pentru care diferența de drum optic  $\Delta = 0$ . Pentru toate radiațiile franja centrală se rotește cu același unghi, rămânând acromatică, deci albă.

Dacă crește grosimea  $\Delta h$ , franja centrală ajunge la marginea câmpului de interferență dacă:

$$OP = (L-a)(n-1)\alpha = L \frac{\Delta h}{2a\alpha}, \text{ de unde:}$$

$$h = 2a\alpha^2(n-1) \frac{L-a}{L} = 3,262\mu \text{ (pentru } \lambda = 500 \text{ nm, } n = 1,5 \text{ )}$$

În cazul biprismei Fresnel, câmpul de interferență este determinat de domeniul de suprapunere a celor două fascicule coerente, iar deschiderea unghiulară a domeniului este determinată de unghiul de deviație (fig. 24).

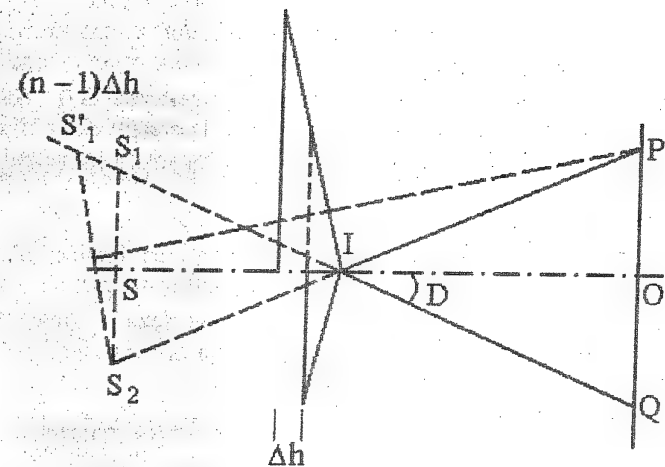


Fig. 23

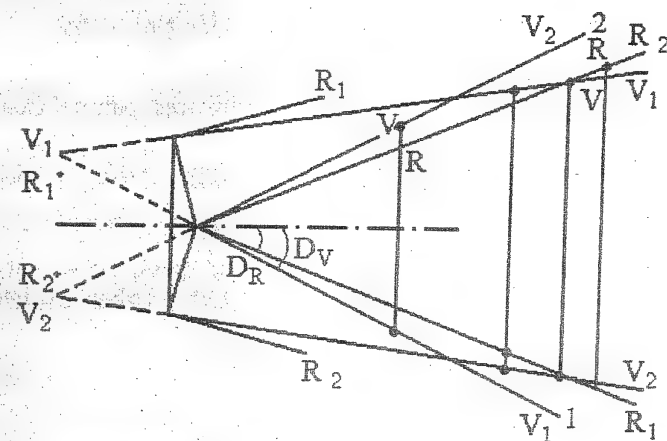


Fig. 24

Deoarece unghiul  $\alpha$  este mic, domeniul de suprapunere este limitat de fasciculele 1 și 2. Deschiderea unghiulară a domeniului de interferență pentru  $\lambda_{\text{rosu}}$  este mai mică decât pentru  $\lambda_{\text{violet}}$ . Dacă datorită creșterii grosimii  $\Delta h$  a unei prismă, franja centrală albă, acromatizată, depășește limita domeniului de interferență pentru  $\lambda_{\text{rosu}}$  (unghiul  $\alpha$  mic), nu se mai produce fenomenul de interferență deoarece cele două fascicule coerente  $\lambda_R$  nu se mai suprapun. În punctele exterioare domeniului de interferență este prezent numai un sfert din intensitatea maximă a radiației  $\lambda_{\text{rosu}}$ .



din domeniul de interferență, intensitate ce provine de la o singură sursă. Același fenomen are loc atunci când se depășesc limitele câmpului de interferență pentru celelalte radiații. În condițiile de mai sus, dacă urmărim franja centrală albă la limita câmpului de interferență în deplasarea ei determinată de creșterea  $\Delta h$ , observăm o diminuare treptată a culorilor în ordinea: roșu, galben și la sfârșit violet. Deci franja centrală va căpăta treptat o tentă violetă, înainte de a dispărea în domeniul uniform luminat.

4. Să considerăm din nou prismele identice. Acestea se iluminează cu lumină albă, iar după ele, în planul de observare, se așează un spectroscop a cărui fantă este dispusă paralelă cu franjele la 8 mm de centru. Să se calculeze lungimea de undă a canelurilor negre și luminoase ale spectrului. Se va neglija dispersia prismei. Spectrul vizibil se consideră cuprins între  $(400 \div 800) \text{ nm}$ .

R: Fanta spectroscopului se află la distanța  $y = 8 \text{ mm}$  de centrul O, unde  $\delta = 0$ . Fanta se află în interiorul câmpului de interferență deoarece  $OP = 8,35 \text{ mm}$ . Fanta se află în interiorul câmpului de interferență deoarece

$OP = 8,35 \text{ mm}$ . Ordinul de interferență pentru  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$  este  $k = \frac{y}{i}$ , iar diferența de drum optic este  $\Delta = \frac{y}{i} \lambda$ . Prin urmare pentru acest punct al câmpului de interferență diferența de drum optic este:

$$\Delta = \frac{8 \text{ mm}}{2,58 \text{ mm}} \cdot 0,5 \mu\text{m} = 1,5514 \mu\text{m}.$$

Pentru același punct, pentru radiația violetă ( $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ ), ordinul de interferență

$$\text{este: } \frac{1,55}{0,4} = 3,8, \text{ iar pentru radiația roșie: } \frac{1,55}{0,8} = 1,9.$$

Deci în spectru vom găsi:

- două caneluri luminoase:  $k = 2,3, \dots (\Delta = k\lambda - \text{maxime})$

$$\frac{1,5514 \mu\text{m}}{2} = 0,7757 \mu\text{m} \text{ și } \frac{1,5514 \mu\text{m}}{3} = 0,5171 \mu\text{m};$$

- două caneluri întunecate:  $p = 2,5; 3,5$

$$(\Delta = (k + \frac{1}{2})\lambda = p\lambda - \text{minime})$$

$$\frac{1,5514 \mu\text{m}}{2,5} = 0,6205 \mu\text{m} \text{ și } \frac{1,5514 \mu\text{m}}{3,5} = 0,44 \mu\text{m}.$$

Distribuția intensității în spectrul "alb de ordin superior" se poate calcula după relația (fig. 25):

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}, \text{ unde: } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l$$

(pentru punctul considerat din câmpul de interferență:  $\Delta l = 1,5514 \mu\text{m}$ ).

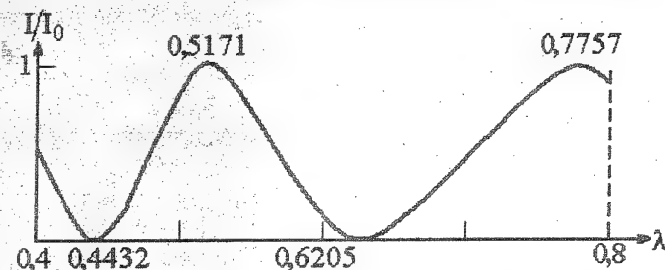


Fig. 25

5. Se înlătură spectroscopul, iar pe una din cele două prismele se lipește o lamă de sticlă cu fețe plan-paralele a cărei indice de refracție este  $n = 1,6$  pentru

$\lambda = 0,5 \mu\text{m}$  și a cărei dispersie este descrisă de relația:  $n = A + \frac{b}{\lambda^2}$ , unde

$b = 2,6 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2$ . Sistemul se iluminează cu radiația galbenă a sodiului, constituită din radiațiile  $\lambda_1 = 0,5890 \mu\text{m}$  și  $\lambda_2 = 0,5896 \mu\text{m}$ . Să se calculeze grosimea  $h$  a lamei pentru ca franjele de interferență să dispară în punctul O de pe axa optică a sistemului (fig. 26).

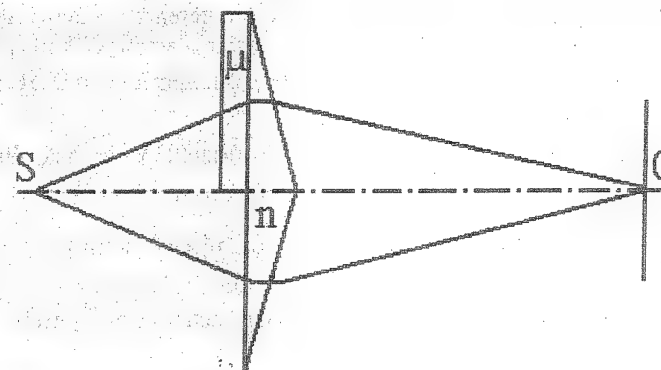


Fig. 26

R: În lipsa lamei, în punctul O, diferența de drum optic era egală cu  $\Delta = 0$ . În prezența lamei, în același punct,  $\Delta = (n-1)h$ , iar franja centrală de ordin zero se

deplasează în sus. În câmpul de interferență apar două sisteme de franje corespunzătoare celor două radiații.

$$\text{Dacă: } \Delta = (n-1)h = k\lambda_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda_2,$$

atunci câmpul de interferență în punctul O va apare uniform iluminat (franjele luminoase  $\lambda_1$  coincid cu cele întunecate  $\lambda_2$ ). De unde:

$$(n-1)h = \frac{k + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\lambda_2}} = \frac{k}{\frac{1}{\lambda_1}} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

(pentru un anumit ordin de interferență k).

$$\text{Deoarece pentru } \lambda = 0,5\mu\text{m}, n_\lambda = 1,6 = A' + \frac{2,6 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2}{25 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2}, \text{ se}$$

obține:  $A' = 1,496$ , pentru  $\lambda = 0,589\mu\text{m}$  rezultă  $n_\lambda = 1,571$ .

Deci:

$$h = \frac{1}{2(n-1)} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} = 0,509 \text{ mm}.$$

Dacă valoarea lui  $h$  crește în continuare se obține pentru un alt ordin de interferență, respectiv o nouă dispariție a tabloului de interferență în regiunea punctului O.

6. Se consideră grosimea lamei de mai sus  $h = 0,01 \text{ mm}$ . Considerând fenomenul de dispersie, să se stabilească ordinul de interferență al franjei acromatice. Aceasta franjă este vizibilă în cazul de față? Se cere ca franja acromatică să apară numai dacă ordinul de interferență  $p$  nu variază practic în jurul valorii  $\lambda = 0,5\mu\text{m}$  pentru care ochiul prezintă sensibilitatea cea mai mare.

R: Într-un punct P al ecranului, situat la distanța  $y$  de axă, diferența de drum optic este:

$$\Delta = \frac{2a(n-1)\alpha}{L} y - (\mu - 1)h.$$

Noua poziție a franjei de ordin zero ( $p = 0$ ) se obține pentru  $\Delta = 0$ , deci:

$$y_0 = \frac{Lh\mu - 1}{2a(n-1)} = 30,95 \text{ mm (pentru } \lambda = 0,5\mu\text{m)}$$

$$\text{Față de } y = 0, \text{ acest punct se află la: } \frac{y_0}{i_{\lambda=0,5\mu\text{m}}} = 12 \text{ interfranje.}$$

Această poziție depinde de lungimea de undă, prin urmare în lumină albă franja centrală apare irizată.

Să determinăm poziția franjei acromatice. Pentru un punct P oarecare din planul de observație ordinul de interferență este:

$$p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2a(n-1)\alpha}{L\lambda} y - (\mu - 1) \frac{h}{\lambda}.$$

În punctul considerat este necesar ca ordinul de interferență să nu depindă de lungimea de undă, deci:

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\Delta}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \frac{d\Delta}{d\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda^2} = 0, \text{ de unde:}$$

$$p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = \frac{2a y \alpha}{L} \frac{dn}{d\lambda} - h \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{p\lambda + (\mu - 1)h}{n-1} \frac{dn}{d\lambda} - h \frac{d\mu}{d\lambda},$$

$$p = \frac{2h}{\lambda} = \frac{(n-1) - (\mu - 1)b}{(n-1)\lambda^2 + 2b} = 1,931,$$

deoarece:

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2b}{\lambda^3} \text{ și } \frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{2\beta}{\lambda^3}?$$

(calculul este făcut pentru  $\lambda = 0,5\mu\text{m}$ , dar se obține același rezultat pentru oricare lungime de undă).

Introducând în relația  $p = \frac{\Delta}{\lambda}$  valoarea lui  $p$  determinată mai sus, se obține poziția franjei "acromatice" față de  $y = 0$ .

$$y_p = \frac{hL}{2a\alpha} \frac{2\beta + (\mu - 1)\lambda^2}{2b + (n-1)\lambda^2} = 35,91 \text{ mm} = y_0 + \Delta y =$$

$$= (30,95 + 4,96) \text{ mm} = (12 + 1,931) i_{\lambda=0,5\mu\text{m}}$$

Poziția acestei franje "acromatice"  $y_p = 35,91 \text{ mm}$  se află în afara câmpului de interferență,  $OP = 8,43 \text{ mm}$ , deci nu este vizibilă.



### Bilentele lui Billet - I

Se consideră o lentilă convergentă  $L$  cu distanța focală  $f = 50\text{ cm}$  și cu diametrul  $2H = 4\text{ cm}$ , iluminată de o sursă punctiformă  $S$  situată pe axa optică la distanța  $p = \frac{3}{2}f$  de lentilă. Lentila  $L$  este tăiată de-a lungul diametrului în două părți  $L_1$  și  $L_2$ . Cele două părți se îndepărtează cu  $\varepsilon = 1\text{ mm}$  de axa optică printr-o translație perpendiculară pe aceasta.

Un ecran  $E$  este dispus perpendicular pe axa optică la o distanță  $L = 50\text{ cm}$  față de punctul  $M$  al intersecției celor două fascicule ce interferă. Sursa de radiație emite în domeniul spectral delimitat de  $\lambda_0 = 400\text{ nm}$  și  $\lambda_1 = 500\text{ nm}$ . Se presupune că  $f$  are aceeași valoare pentru toate lungimile de undă.

1. Pe baza fig. 27, să se explice formarea franjelor de interferență pe ecranul  $E$ .

R: Fie  $S_1$  și  $S_2$  imaginile sursei  $S$  formate de cele două semilente  $L_1$  și  $L_2$ . Cele două fascicule care emerg din punctele  $S_1$  și  $S_2$  se întâlnesc în  $M$ , de unde încep să se suprapună parțial, creind câmpul de interferență.

Să considerăm un punct  $P$ , de pe ecranul  $E$ , al acestui câmp. În punctul  $P$  se întâlnesc două raze  $SL_1S_1P$  și  $SL_2S_2P$  care provin de la același punct al sursei  $S$ , deci sunt coerente. Amplitudinea vibrației rezultante în punctul  $P$  este:  $A = 2a \cos \frac{\varphi}{2}$ , unde  $\varphi = \frac{2\Delta}{\lambda}$ ,  $\Delta = S_2P - S_1P$  reprezentând diferența de drum,

deoarece există egalitatea drumurilor optice  $SL_2S_2 = SL_1S_1$ . Pozițiile de amplitudine rezultantă egală se află pe o familie de suprafețe hiperbolice pentru care  $S_1$  și  $S_2$  sunt focare. Secționarea acestor suprafețe hiperbolice de către planul  $E$  conduce la franje de interferență care apar aproape ca niște drepte.

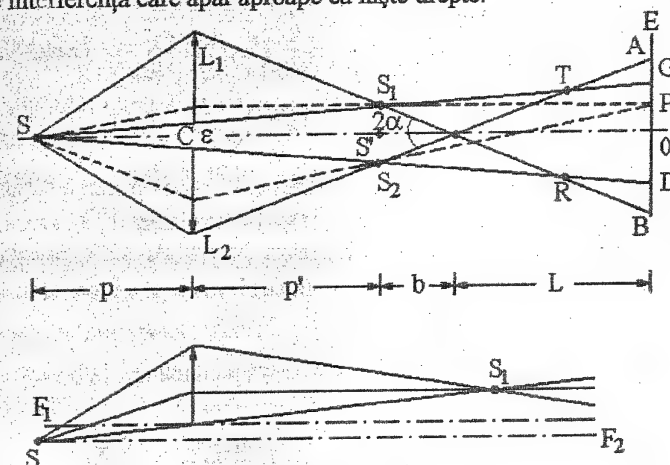


Fig. 27

Din relația:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ , rezultă:

$$p' = CS' = 3f, \text{ deci: } SS' = \frac{9}{2}f = 3p$$

Din fig. 27:  $\frac{S_1S_2}{\varepsilon} = \frac{p+p'}{p} = \frac{3p}{p}$ , deci:  $S_1S_2 = 3\text{ cm}$ ;

$$\frac{S'M}{CM} = \frac{S_1S_2}{2H+\varepsilon}, \text{ deci: } \frac{b}{p'+b} = \frac{3}{41}, b = 11,8\text{ cm},$$

iar:  $CM = p' + b = 3,50 + 11,8 = 161,8\text{ cm}$

2. Să se calculeze lărgimea "unghiulară"  $2u$  a regiunii comune a celor două fascicule ce interferă, de pe ecranul  $E$ , plasat la distanța  $L$  față de punctul  $M$ .

R: Unghiul  $S_1MS_2 = 2\alpha$ , format de razele extreme, are o valoare mică, deci se poate scrie:

$$2\alpha = \frac{2H+\varepsilon}{CM} = \frac{41}{1618} \approx \frac{1}{40}$$

Razele extreme intersectează ecranul în punctele  $A$  și  $B$ , deci:

$$AB \cong 2\alpha\Delta = \frac{500}{40}$$

Razele centrale intersectează ecranul E în punctele G și D, deci:

$$\frac{GD}{\varepsilon} = \frac{SO}{p}, \quad GD = \varepsilon \frac{SO}{p} = 3,824 \text{ mm}$$

Deoarece  $GD < AB$ , ecranul se află dincolo de regiunea TR, deci:

$$2u = GD = 3,824 \text{ mm}$$

3. Să se descrie aspectul succesiv al fenomenului observat într-un spectroscop a cărui fantă se află la o distanță  $r$  de centrul câmpului în planul E și este orientată paralel cu franjele, dacă spectroscopul se deplasează în așa fel încât parametrul  $x$  variază între valorile  $0 \div u$ . Să se estimeze numărul maxim de caneluri ce apar simultan dacă  $\Delta\lambda = (400 \div 600) \text{ nm}$

R: Pe ecranul E franjele apar rectilinii și perpendiculare la direcția  $S_1S_2$ . Franja centrală este albă (fig. 28).

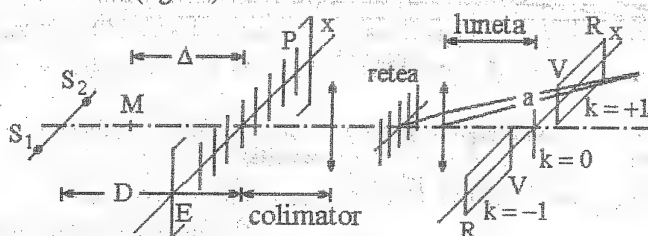


Fig. 28

Să considerăm un punct P, situat la distanța  $x$  față de franja centrală. Diferența de drum optic este:

$$\Delta = S_2P - S_1P = \frac{S_1S_2}{b+L} x = \frac{3 \text{ mm}}{618 \text{ mm}} x,$$

iar, pentru o lungime de undă dată, interfranja  $i_\lambda = \frac{b+L}{S_1S_2} \lambda$  este proporțională cu lungimea de undă.

La deplasarea fantei spectroscopului se observă următorul tablou de interferență: începând de la franja centrală unde  $\Delta = 0$ , ceea ce determină un maxim de intensitate pentru toate radiațiile, de o parte și de alta se află o franja luminoasă, irizată la margini în violet spre interior și roșu la exterior (atragem atenția că, de fapt, și franja centrală este irizată la margini în roșu). În cea de a doua franjă domeniul irizat în roșu se distanțează și mai mult de cel irizat în violet, astfel încât domeniul violet al celei de a

treia franjă coincide cu cel roșu din a doua ( $2\lambda_1 = 3\lambda_0 = 1,2 \mu\text{m}$ ). Dacă parametrul  $x$  crește și mai mult se obține "albul de ordin superior".

Dacă fanta spectroscopului este dispusă exact în punctul O, se observă un spectru strălucitor de la violet la roșu. Când fanta se deplasează în sensul creșterii lui  $x$  (fanta aflându-se încă în interiorul franjei centrale) se observă o diminuare a intensității

culorilor începând cu violetul. Apoi pentru  $x = \frac{i_\lambda}{2}$ , fiecare culoare va fi stinsă,

stingerea violetului precedând stingerea radiației roșii (un canal întunecat, larg va trece prin spectru de la violet la roșu, atunci când se deplasează spectroscopul). Pentru

$x = i_V$  reapare violetul,  $x = i_G$  - galbenul și  $x = i_R$  - roșul sub forma unui canal larg strălucitor care va trece prin spectru de la violet la roșu. Pentru  $x = 2i_V$ , din nou

apare dinspre violet un canal strălucitor care se deplasează spre roșu odată cu deplasarea spectroscopului. Acest canal încă nu părăsește spectrul înspre roșu în momentul în care

apare în violet un nou canal strălucitor ( $2\lambda_1 = 3\lambda_0 = 1,2 \mu\text{m}$ ). Cu creșterea valorii parametrului  $x$  apar din ce în ce mai multe caneluri și acestea se îndesesc. Numărul lor va fi maxim dacă  $x = u$ . În acest caz:

$$\Delta = \frac{S_1S_2}{b+L} u = 9,28 \mu\text{m}.$$

Pentru radiațiile extreme ordinele de interferență sunt:

$$\lambda_0 = 0,4 \mu\text{m}, \quad k_0 = \frac{9,28}{0,4} = 25,2; \quad \lambda_1 = 0,6 \mu\text{m}, \quad k_0 = 15,4.$$

În spectru, la toate radiațiile cuprinse între aceste lungimi de undă și pentru care  $\Delta = k\lambda$ , unde  $k$  este un număr întreg, le vor corespunde caneluri luminoase. Sunt opt asemenea caneluri:

$$\lambda_{16} = \frac{9,28}{16} = 0,58 \mu\text{m}, \quad \lambda_{17} = 0,546 \mu\text{m}, \dots, \quad \lambda_{23} = \frac{9,28}{23} = 0,405 \mu\text{m}.$$

De asemenea apar opt caneluri întunecate, ordinul lor de interferență fiind cuprins între 15,5 și 22,5:

$$\lambda_{15,5} = \frac{9,28}{15,5} = 0,5922 \mu\text{m}, \dots, \quad \lambda_{22,5} = 0,4124 \mu\text{m}.$$

4. Să se explice aspectul tabloului observat dacă spectroscopul este așezat în așa fel încât fanta este perpendiculară la franjă. Se va analiza cazul când se utilizează atât un spectroscop cu prismă, cât și unul cu rețea de difracție. În cazul spectroscopului cu rețea se va stabili ecuația liniilor de distribuție a luminii în planul focal al obiectivului lunetei spectroscopului (se va considera axa  $X$  paralelă cu fanta, iar axa  $Y$  perpendiculară pe aceasta).

R: a) *Spectroscop cu rețea de difracție*: în acest caz vor apare mai multe spectre de diferite ordine (fig. 29). Să ne situăm de ex. în spectrul de ordinul întâi. Dacă se consideră o singură radiație  $\lambda$ , atunci în spectru, în locul corespunzător acestei lungimi de undă, vor apare o serie de puncte luminoase dispuse față de franja centrală la distanța:

$$x = ki_{\lambda} = k \frac{(L+b)\lambda}{S_1 S_2}$$

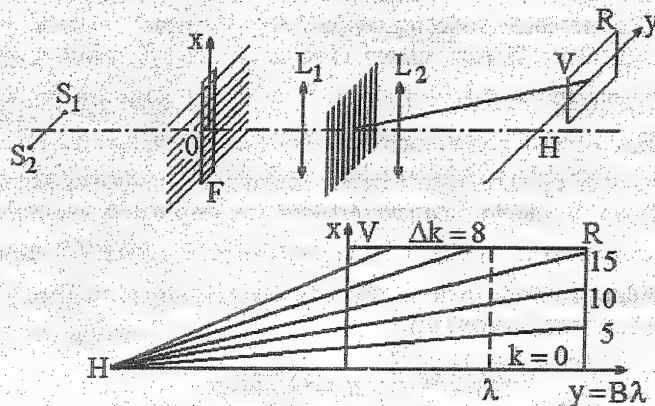


Fig. 29

Poziția radiației în spectru este determinată de dispersia rețelei, fiind dispusă la distanța  $y = B\lambda$  de franja de difracție de ordin zero. Când se trece la altă radiație maximele de radiație determinate de interferență se deplasează pe niște drepte:

$$\frac{x}{y} = ct \cdot k.$$

Dacă înălțimea fantei spectroscopului cuprinde tot câmpul de interferență, atunci în domeniul violet se vor observa  $2 \cdot 23 + 1 = 47$  caneluri, iar în roșu:  $2 \cdot 16 + 1 = 33$  caneluri.

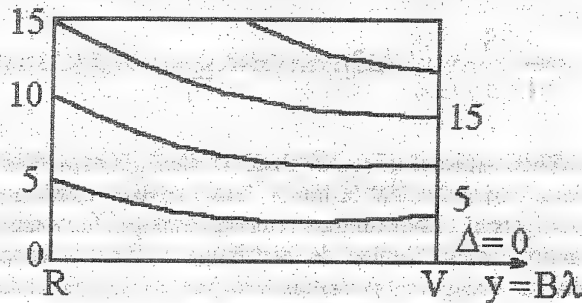


Fig. 30

b) *Spectroscop cu prismă*: În acest caz se obține un singur spectru. Poziția radiației în spectru nu mai este proporțională cu lungimea de undă ( $y = B\lambda$ ), ci cu  $y = f(\lambda)$ ; ( $f(\lambda)$  - dispersia prismei), și ca rezultat liniile  $k = ct$  nu mai sunt niște drepte (fig. 30).

5. Cele două lentile  $L_1$  și  $L_2$  se îndepărtează de-a lungul axei optice (experiența lui Mesnil). Să se stabilească că suprafețele de interferență sunt niște suprafețe elipsoidale ce au drept focare imaginile  $S_1$  și  $S_2$  ale lui  $S$ , imagini ce se află pe axa optică a semilentelelor. Franjele se observă într-un plan perpendicular pe axa optică.

R: Regiunea comună a celor două fascicule se întinde de la  $S_2$  la  $S_1$ , fiind foarte îngustă, astfel încât franjele sunt vizibile numai cu ajutorul lupei. Să considerăm un punct  $P$ , dispus pe ecranul  $E$ , în câmpul de interferență (fig. 31 - se va analiza grafic poziția focarelor imagine  $S_1$  și  $S_2$  funcție de poziția sursei față de  $L_1$  și a distanței dintre  $L_1$  și  $L_2$ ).

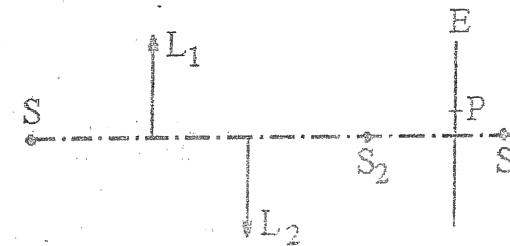


Fig. 31

Drumurile optice sunt corespunzător:

$$(SL_1P) = (SS_1) - (PS_1) \text{ și } (SL_2P) = (SS_2) + (PS_2),$$

unde mărimea  $(SS_1)$ , considerată pe axa optică, este:

$$(SS_1) = (SS_2) + (S_2S_1) = (SS_2) + 2l,$$

de unde:

$$\Delta = (S_2P + S_1P) - 2l.$$

Pentru:  $\Delta = ct$  se obține:

$$S_2P + S_1P = 2l + ct,$$

cece reprezintă ecuația unor elipsoizi homofocali. Dacă  $\Delta = k\lambda$  - franjele sunt întinse deoarece la trecerea luminii prin focalul  $S_2$  se introduce o diferență de drum suplimentară egală cu  $\lambda/2$  (efectul Guoy). Franjele apar sub formă de semicercuri, centrul fiind întinecat și dispus pe axa optică, iar în lumină albă sunt irizate în violet spre interior și roșu spre exterior.



### Bilentele lui Billet - 2

Considerăm sistemul de lentile Billet. Distanța dintre cele două jumătăți de lentile  $C_1C_2 = 0,5 \text{ mm}$ , iar distanța focală a lentilei inițiale este egală cu  $f = 20 \text{ cm}$ ; fanta, paralelă cu tăietura lentilei, se află la distanța  $p = 40 \text{ cm}$  față de bilentele, iar ecranul de observare  $E$  la o distanță egală cu  $60 \text{ cm}$ .

1. - Să se calculeze valoarea interfranței  $i$  și numărul de franje luminoase observate pe ecranul  $E$  ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ). Care este lățimea minimă  $s$  a fantei  $S$  pentru care vizibilitatea tabloului de interferență devine egală cu zero?

R: Deoarece  $p = 40 \text{ cm} = 2f$ , rezultă  $p' = 2f = 40 \text{ cm}$ , iar

$$\frac{S_1S_2}{C_1C_2} = \frac{p+p'}{p}, \text{ deci } S_1S_2 = 2a = 1 \text{ mm}.$$

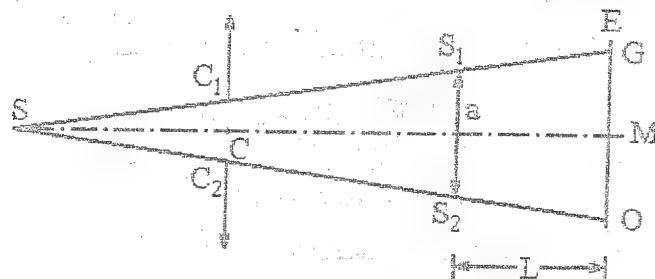


Fig. 32

$$\text{Interfranța } i_\lambda = \frac{L}{S_1S_2} = 0,1 \text{ mm}. \text{ Presupunem diametrul bilentei suficient}$$

de mare astfel încât câmpul de interferență pe ecranul  $E$  să fie limitat de razele  $SC_1S_1$  și  $SC_2S_2$  (fig. 32).

Semilărgimea câmpului va fi:

$$\frac{MG}{a} = \frac{p+p'+L}{p+p'}, \text{ de unde: } MG = 0,625 \text{ mm}.$$

$$\text{Numărul de franje: } \frac{MG}{i} = 6,25, \text{ deci numărul de franje luminoase în}$$

câmpul de interferență este:

$$n = 2 \cdot 6 + 1 (\text{fr. centrala}) = 13.$$

Dispariția franjelor determinată de lărgirea fantei. Să considerăm două surse  $S$  și  $S'$ , iar distanța  $SS' = a$ . Imaginile lui  $S'$  sunt  $S'_1$  și  $S'_2$ , iar  $S_1S'_1 = S_2S'_2 = O_1O'_2 = a$ , (deoarece  $p = p'$ ) și  $S_1S_2 = S'_1S'_2 = 2a$  (fig. 33 a). Să considerăm un punct oarecare  $P$  în câmpul de interferență în așa fel încât  $MP = a + x$ . Diferența de drum optic între razele ce pleacă din  $S'$  și ajung în  $P$ , trecând respectiv prin  $S'_1$  și  $S'_2$  este:

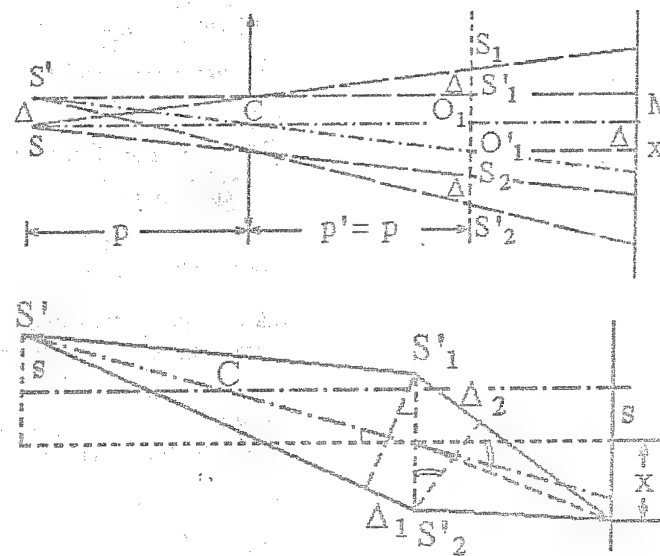


Fig. 33 a,b

$$(S'S_1P) - (S'S_2P) = (S'S_1) - (S'S_2) + (S_1P) - (S_2P) = \Delta_2 - \Delta_1,$$

unde:

$$\frac{\Delta_1}{2a} = \frac{2s}{2p}, \Delta_1 = 2a \frac{s}{p} \text{ și } \frac{\Delta_2}{2a} = \frac{x}{L}, \Delta_2 = 2a \frac{x}{L}.$$

Pentru ca în punctul P să fie localizată o franjă centrală este necesar ca diferența de drum optic să fie egală cu zero, ceea ce se realizează când  $\Delta_1 = \Delta_2$ , deci:

$$x = s \frac{L}{p} \text{ și } MP = s \left( 1 + \frac{L}{p} \right).$$

Să analizăm condițiile în care vizibilitatea tabloului de interferență devine egală cu zero (dispar franjele de interferență). La început considerăm două surse punctiforme situate pe o dreaptă perpendiculară pe axa optică a sistemului ( $S$  și  $S'$ ) (fig. 34). Dacă valoarea distanței  $a$  dintre cele două surse este în așa fel încât  $M'$  (maximul central al sistemului de franje  $S'$ ) coincide cu, de ex., primul minim al sistemului de franje de interferență  $S$ , atunci câmpul de interferență va fi uniform iluminat. Mărind valoarea distanței  $a$  se ajunge la situația când franja corespunzătoare lui  $k = 0$  a sistemului  $M'$  se suprapune peste franja  $k = 1$  a sistemului  $M$ , deci din nou se observă tabloul de interferență. Mărind în continuare distanța  $a$ , franjele de interferență vor apare și dispăre alternativ.

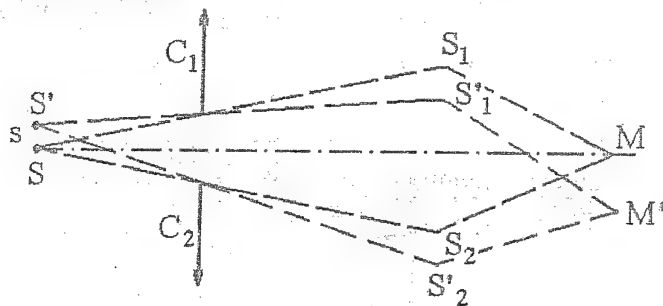


Fig. 34

Să considerăm în locul sursei  $S$  o fantă cu lățimea variabilă. Se observă că mărind deschiderea fantei, atunci când distanța dintre maximele sistemelor de interferență date de marginile  $A$  și  $C$  ale fantei este egală cu interfranja  $i$ , dispăre complet vizibilitatea franjelor. Din fig. 35 se observă că intensitatea luminoasă în fiecare punct al câmpului de interferență este proporțională cu suprafața cuprinsă între două minime:

$$I_P = \int_{x_1}^{x_2} I(x) dx.$$

Deci lățimea minimă a fantei sistemului pentru care vizibilitatea franjelor dispăre complet se obține atunci când  $MP = i$ . Dacă mărim lățimea fantei franjele reapar, dar pe un fond luminos. Odată cu mărirea fantei vizibilitatea scade până se obține un câmp iluminat uniform.

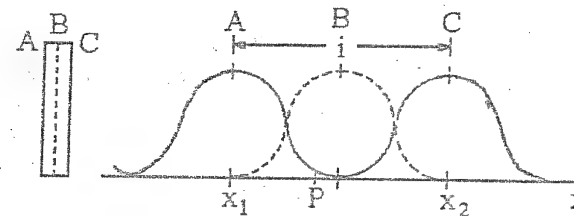


Fig. 35

Pentru  $MP = i$ , se obține:

$$s = \varepsilon = \frac{i}{1 + \frac{L}{p}} = 0,066 \text{ mm}.$$

2. - Să considerăm bilentilele neacromatizate, deci imaginile  $S_1$  și  $S_2$  corespunzătoare la diferite frecvențe nu mai coincid; distanța  $S_1S_2 = 2a$ , precum și distanța  $L$  până la ecran variază cu lungimea de undă  $\lambda$ . Să se determine poziția ecranului de observare pentru ca franjele să rămână nete în lumină albă. În acest scop considerăm că distanța dintre ecran și bilentile ( $H = p' + L$ ), distanța de la fantă  $S$  la bilentile ( $p$ ) precum și distanța  $C_1C_2$  dintre centrele optice ( $e$ ) sunt independente de lungimea de undă; notăm cu  $f$  distanța focală corespunzătoare radiației  $\lambda$  a bilentilelor presupuse subțiri. Pentru această radiație medie se va calcula distanța  $2a$ ,  $L$ , precum și interfranja  $i$  funcție de mărimile  $H$ ,  $e$ ,  $p$ , și  $f$ . Se va calcula valoarea  $H$  care

anulează mărimea  $\frac{di}{d\lambda}$ . Se consideră relația:

$$\frac{\lambda}{f} \frac{df}{d\lambda} = - \frac{\frac{dn}{n}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = A,$$

unde  $A$  reprezintă o constantă pozitivă caracteristică materialului din care este confecționată lentila subțire. Se va verifica dacă franjele sunt acromatice. Sursa  $S$  și ecranul  $E$  sunt dispuse conjugat față de o lentilă subțire fictivă plasată în  $C_1C_2$ , a

carei distanță focală ar fi egală cu  $f(1+A)$ . Pentru  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , se consideră  $A = 0,11$ ,  $p = 40 \text{ cm}$  și  $f = 20 \text{ cm}$ .

R: Din relatia lentilelor subtiri:

$$\frac{1}{f_{\lambda}} = (n_{\lambda} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \text{ se obține: } \frac{df}{d\lambda} = - \frac{f}{n-1} \frac{dn}{d\lambda}, \text{ de unde:}$$

$$\frac{\lambda}{f} \frac{df}{d\lambda} = - \frac{\frac{dn}{n-1}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = A.$$

(când  $\lambda$  crește,  $n$  scade, deci  $f$  crește).

Pentru radiatia cu lungime de undă medie  $\lambda$ :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}, \text{ deci: } p' = \frac{pf}{p-f} \text{ și } L = H - p' = \frac{Hp - f(H+p)}{p-f},$$

$$\text{iar: } \frac{2a}{e} = \frac{p+p'}{p} = \frac{p}{p-f}, \text{ deci: } 2a = \frac{ep}{p-f}.$$

De unde:

$$i = \frac{\lambda D}{2a} = \frac{[H_p - f(H+p)]\lambda}{ep}$$

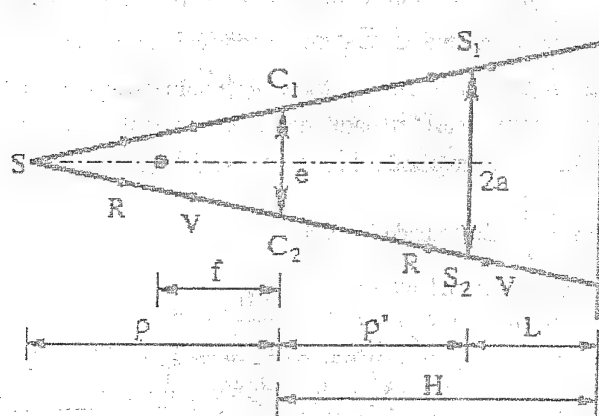


Fig. 36

Deoarece mărimile  $H$ ,  $p$  și  $e$  nu depind de lungimea de undă:

$$\text{ep} \frac{di}{d\lambda} = \frac{\lambda D}{2a} = -f(H+p) - \lambda(H+p) \frac{df}{d\lambda}, \text{ unde: } \frac{df}{d\lambda} = A \frac{f}{\lambda}.$$

Această expresie se alege pen

$$\frac{H_p}{H+p} = f(A+1), \text{ sau: } \frac{1}{p} + \frac{1}{H} = \frac{1}{F(A+1)},$$

(deci sursa  $S$  și ecranul  $E$  sunt conjugate în raport cu lentilă fictivă din  $C_1C_2$  și a  
cărei distanța focală este  $f(1+A)$ ). De unde:

$$H = \frac{pf(A+1)}{p-f(A+1)} = 49,88 \text{ cm, iar } i = \frac{\lambda D}{2a} = 49,4 \mu\text{m}.$$

3. - Sursa S este punctiformă și monocromatică ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ). Cele două jumătăți de lentilă se distanțează de-a lungul axei optice, fiind situate față de S la distanța  $SC_1 = p_1$ , respectiv  $SC_2 = p_2$  (lentilele Mesnil). Imaginile sursei S formate de cele două jumătăți de lentilă se află față de sursă la distanța  $SS_1 = Z_1$  și  $SS_2 = Z_2$ . Să se arate că în planul E, situat la distanța  $SO = Z$  față de sursă ( $Z$  cuprins între  $Z_1$  și  $Z_2$ ), se observă franje *semicirculare* cu centrul în O. Să se calculeze raza r a cercului întunecat cu numărul k funcție de mărimile  $Z$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  și  $\lambda$  (se consideră că valoarea mărimii r este mică față de mărimea distanțelor  $S_1O = Z_1 - Z$  și  $S_2O = Z - Z_2$ ). Se va considera  $f = 20 \text{ cm}$ ,  $p_1 = 25 \text{ cm}$ ,  $p_2 = 40 \text{ cm}$ ,  $Z = 100 \text{ cm}$  și  $k = 1$ . Să se arate că franjele sunt cele mai largi posibil când ecranul E se află la distanță egală de imaginile  $S_1$  și  $S_2$ .

R: Câmpul de interferență este determinat de partea comună a celor două fascicule care au forma a două jumătăți de con a căror vârfuri se află în  $S_1$ , respectiv  $S_2$  (fig. 37). Deci sistemul de franje prezintă o simetrie cilindrică în jurul axei  $SS_1S_2$ . Intersecția sistemului de franje cu un plan  $E$ , perpendicular pe axa optică  $SS_1S_2$ , reprezintă franje de forma *semicirculară*. Centrul *semicercurilor* ce se află pe axa  $SS_1S_2$  este întunecat deoarece unul din fascicule ( $S_2$ ), trecând prin focar capătă o diferență de drum optic suplimentară de  $\frac{\lambda}{2}$  (diferență de fază suplimentară de  $\pi$ ) (fig.

37). Diferența de drum optic:

$$\Delta = SL_1P - SL_2P + \frac{\lambda}{2} = SL_1S_1 - S_1P - SL_2S_2 - S_2P + \frac{\lambda}{2} =$$

$$= (SS_1 - SS_2) - (S_2P + S_1P) + \frac{\lambda}{2} = S_2S_1 - (S_2P + S_1P) + \frac{\lambda}{2} = ct$$

(deoarece drumurile optice sunt egale:  $SL_1S_1 = SS_1$  și  $SL_2S_2 = SS_2$ )



de unde:

$$S_1P + S_2P = S_1S_2 + \frac{\lambda}{2} - \Delta.$$

Pentru  $\Delta = ct$  se obține:  $S_1P + S_2P = ct$ , deci suprafețele pentru care  $\Delta = ct$  reprezintă suprafețe elipsoidale de revoluție cu focarele în  $S_1$  și  $S_2$  (pe ecranul E se vor obține franje de formă semicirculară).

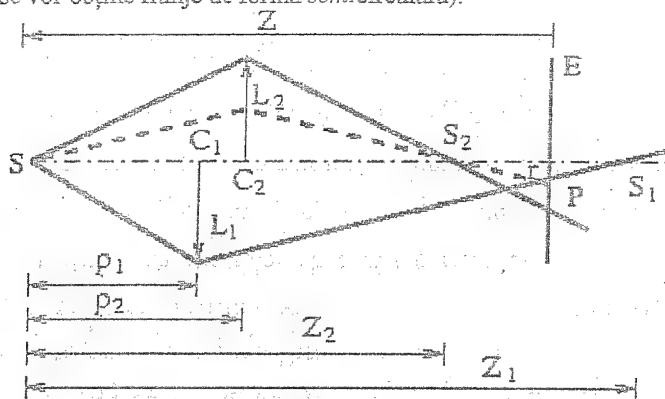


Fig. 37

$$\begin{aligned} S_2P &= \sqrt{(Z - Z_2)^2 + r^2} = \\ &= (Z - Z_2) \sqrt{1 + \frac{r^2}{(Z - Z_2)^2}} \cong (Z - Z_2) \left[ 1 + \frac{r^2}{2(Z - Z_2)^2} \right] \\ \Delta_1 &= \Delta - \frac{\lambda}{2} = Z_1 - Z_2 - (Z - Z_2) - \frac{r^2}{2(Z - Z_2)} - \frac{r^2}{2(Z_1 - Z)} = \\ &= \frac{r^2}{2} \frac{Z_1 - Z_2}{(Z - Z_2)(Z_1 - Z)} \end{aligned}$$

Dacă  $\Delta_1 = k\lambda$  obținem cercuri întinse a căror rază este:

$$r_k = \sqrt{k\lambda} \sqrt{\frac{(Z - Z_2)(Z_1 - Z)}{Z_1 - Z_2}}$$

Pentru  $f = 20$  cm,  $p_1 = 25$  cm,  $p_2 = 40$  cm, se obține:

$$p'_1 = 100$$
 cm,  $p'_2 = 40$  cm,  $Z_1 = 125$  cm și  $Z_2 = 80$  cm ( $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ ).

deci:

$$r_1 = 0,333$$
 mm.

Mărimea  $r_k$  este maximă atunci când:

$$Z - Z_2 = Z_1 - Z = \frac{Z_1 - Z_2}{2}, \text{ de unde: } Z = \frac{Z_1 + Z_2}{2}, \text{ deci:}$$

$$r_{k_{\max}} = \frac{\sqrt{k}}{2} \sqrt{2\lambda(Z_1 - Z_2)}; \quad r_{1_{\max}} = 0,3354$$
 mm.

4. - Sistemul de lentile Mesnil se iluminează cu lumină albă. Din cauză dispersiei semilentelelor, imaginile  $S_1$  și  $S_2$  nu se formează la aceeași distanță  $Z_1$  și  $Z_2$  pentru toate lungimile de undă. Din această cauză este posibil să se observe franje nete în lumină albă (franje acromatice în lumină albă), adică pentru o oarecare poziție a ecranului E, raza unei franje cu un număr  $k$  determinat nu variază sensibil cu lungimea de undă. Să considerăm această distanță dintre ecran și sursă egală cu  $Z$ . Să se stabilească relația dintre  $Z$  și  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $f$  și constanta  $A = \frac{\lambda}{f} \frac{df}{d\lambda}$ . Se va calcula valoarea constantei  $A$  care caracterizează dispersia materialului bilentilelor ( $f = 20$  cm,  $p_1 = 25$  cm,  $p_2 = 40$  cm,  $Z = 85$  cm).

R: Din relația  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1}$ , se obține:  $p'_1 = \frac{p_1 f}{p_1 - f}$ , deci:

$$\begin{aligned} Z_1 &= p_1 + p'_1 = \frac{p_1^2}{p_1 - f}, \text{ de unde: } \frac{dZ_1}{d\lambda} = \frac{p_1^2}{(p_1 - f)^2} \frac{df}{d\lambda} = \frac{p_1^2}{(p_1 - f)^2} A \frac{f}{\lambda} \\ r_k^2 &= 2k\lambda \frac{(Z - Z_2)(Z_1 - Z)}{Z_1 - Z_2} \end{aligned}$$

(mărimile  $Z_1$  și  $Z_2$  depind de lungimea de undă), este necesar ca raza semicercului să nu depindă de lungimea de undă. Dacă se logaritmează și se derivează în raport cu  $\lambda$ , iar derivata se egalează cu zero:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} + \frac{dZ_1}{d\lambda} \frac{(Z - Z_2)}{(Z_1 - Z)(Z_1 - Z_2)} - \frac{dZ_2}{d\lambda} \frac{(Z_1 - Z)}{(Z - Z_2)(Z_1 - Z_2)},$$

de unde:

$$\frac{(Z_1 - Z)(Z - Z_2)(Z_1 - Z_2)}{Af} =$$

$$= \frac{p_2^2}{(p_2 - f)^2} (Z_1 - Z)^2 - \frac{p_1^2}{(p_1 - f)^2} (Z - Z_2)^2$$

(dacă se cunoaște constanta  $A = -\frac{dn}{d\lambda}$ , se poate determina poziția franjei

acromatice). Dacă se cunoaște mărimea  $Z$  atunci:

$$A = \frac{(Z_1 - Z)(Z - Z_2)(Z_1 - Z_2)}{f \left\{ \left[ \frac{p_2(Z_1 - Z)}{p_2 - f} \right]^2 - \left[ \frac{p_1(Z - Z_2)}{p_1 - f} \right]^2 \right\}}$$

Pentru  $Z = 85$  se obține  $A = 0,0779$  (pentru valoarea medie a distanței focale  $f$ ).

Pana de aer

Să considerăm două plăci de sticlă cu fețele prelucrate optic și plan-paralele. Fețele au forma de pătrat cu latura de 40 mm (fig. 38).

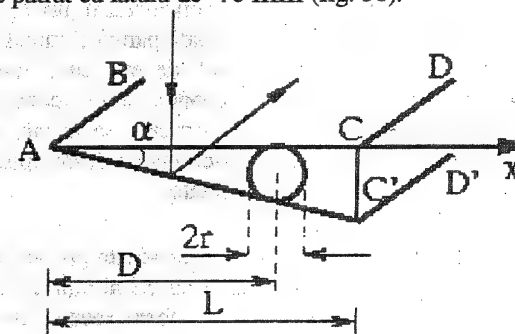


Fig. 38

1. - Cu cele două plăci se formează o pană de aer. Două laturi ale plăcilor (AB și A'B') coincid exact, iar celelalte două (CD și C'D') sunt separate printr-un fir de sârmă de diametru  $2r = 0,01 \text{ mm}$ , dispus la  $D = 35 \text{ mm}$  față de capetele ce se sprijină direct. Sistemul este iluminat cu un fascicul de radiație monocromatică  $\lambda = 546 \text{ nm}$  (radiația verde a Hg) sub incidență aproape normală. Să se calculeze numărul de franje negre de interferență care se observă, dacă ochiul este acomodat pe planul lamei subțiri.

R: Sursa de radiație monocromatică nu este punctiformă, franjele sunt localizate pe lamă, iar incidența este normală, deci:

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2}, \text{ unde } h = k \frac{\lambda}{2}, \text{ pentru franjele întunecate.}$$

Din fig. 38:  $\frac{h}{2r} = \frac{x}{D}$ . Franjă întunecată  $x$  va fi localizată în poziția

$$x = \frac{Dh}{2r} = k \frac{\lambda D}{4r}, \text{ iar interfranja: } i = \frac{\lambda D}{4r} = 0,9555 \text{ mm.}$$

$$\text{Numărul de franje întunecate până la fir: } \frac{D}{i} = 36 + \frac{344}{546}, \text{ deci:}$$

$$n = 36 + 1 (\text{la contactul AB/A'B'}) = 37.$$

$$\text{In total apar: } \frac{L}{i} = \frac{4rL}{D} = 41, \text{ deci } n = 41 + 1 = 42 \text{ franje întunecate. Regiunea}$$

acoperită de fir se află în apropierea unei zone luminoase ( $\frac{344}{546} = \frac{344}{\lambda} \approx \frac{1}{2}$  - franjă luminoasă).

2. - Să se arate că dacă fasciculul incident este considerat riguros paralel, se pot observa franje, în afara planului lamei subțiri de aer, în toată partea comună a celor două fascicule reflectate de cele două fețe ale lamei, vizând, de ex., cu o lupă o regiune îndepărtată de plăcile ce au format pana de aer. Presupunând că fasciculul cade normal pe linia de contact (AB) a plăcilor, însă sub o incidență oarecare, să se calculeze distanța dintre suprafețele de interferență (locul punctelor cu diferența de drum optic egală) care intersectează partea comună a celor două fascicule reflectate.

R: Dacă fasciculul este paralel putem considera că acesta provine de la o sursă punctuală ce se află la infinit. Acest caz este asemănător cu cel al oglinzilor Fresnel (se obțin franje de interferență nelocalizate). Interfranja, conform relației de la oglinzile Fresnel:

$$i = \frac{\lambda L}{2a} = \frac{\lambda L}{2R\alpha},$$

unde:  $\alpha$  - unghiul dintre cele două oglinzi, respectiv unghiul penei de aer,  $R$  - distanța dintre sursă (imagini) și linia de contact a celor două plăci,  $L$  - distanța imagine-ecran.

$$\text{Dacă mărimea } R \text{ tinde la infinit și } L \text{ tinde la infinit, deci}$$

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{\lambda D}{4r} = 0,9555 \text{ mm, deoarece: } \alpha = \frac{2r}{D} \text{ (unghiul penei de aer).}$$

3. - Între cele două plăci, la ambele capete, se așează câte un fir cu diametrul de  $2r = 0,04 \text{ mm}$ , obținând astfel o lamă subțire de aer cu fețe plan-paralele. Sistemul

se iluminează sub incidență aproape normală cu un fascicul de lumină albă. Imaginea lamei subțiri se proiectează pe fanta unui spectroscop. Să se calculeze numărul de caneluri întunecate, vizibile în domeniul spectral  $\lambda = (656 \div 486) \text{ nm}$ . Să se indice schematic cum poate fi aranjată experiența.

R: Fanta spectroscopului este iluminată cu radiație de tip "alb de ordin superior". Pentru radiațiile care lipsesc, făcând să apară caneluri întunecate în spectru, este îndeplinită condiția:  $2h = k\lambda$ .

$$\text{Deci: } \lambda_1 = 656 \text{ nm, } k_1 = \frac{2h}{\lambda_1} = \frac{80 \mu\text{m}}{656 \text{ nm}} = 121 + \frac{624}{656};$$

$$\lambda_2 = 486 \text{ nm, } k_2 = 164 + \frac{296}{486}$$

Prin urmare în spectru vor apărea:  $164 - 121 = 43$  caneluri întunecate. Observarea tabloului de interferență se poate face cu dispozitivul clasic al lui Fizeau (fig. 39).

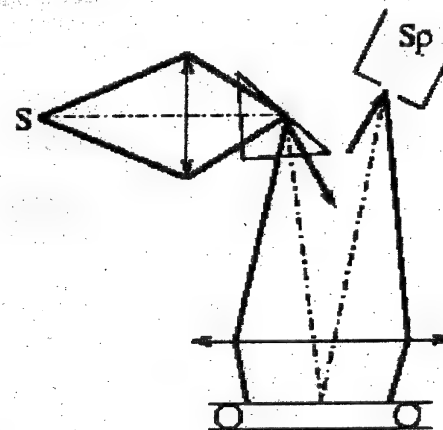


Fig. 39

Să considerăm două lame de sticlă plane  $M_1$  și  $M_2$ , semi-argintate, care fac un unghi mic  $\alpha$ . Lama  $M_2$  este fixă, iar lama  $M_1$  se poate roti în jurul axului A, perpendicular pe fig. 40 și care se află la  $r = 4 \text{ cm}$  de lame. Lamele sunt iluminate normal cu radiația monocromatică  $\lambda = 560 \text{ nm}$  emisă de sursa S. Ansamblul  $M_1M_2$  formează franje localizate pe pana de aer care se observă cu luneta L.



1. - Dacă se rotește lama  $M_1$  cu un unghi  $d\alpha$  apare o deplasare a franjelor.

Știind că se poate observa o deplasare de  $\frac{1}{2}$  dintr-o franjă, să se aprecieze cea mai mică valoare a unghiului de rotație ce poate fi observată prin această metodă?

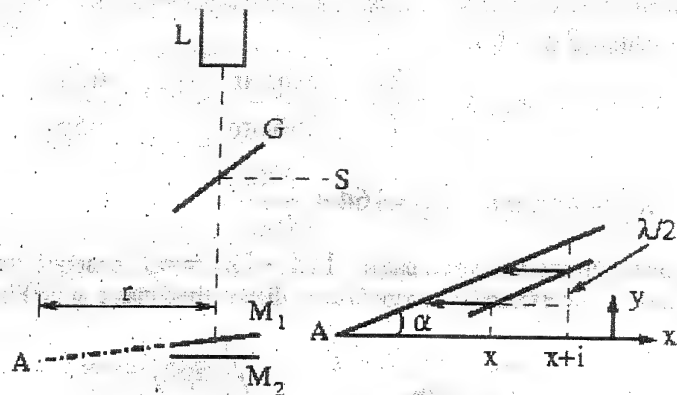


Fig. 40

R: Dacă  $i$  reprezintă valoarea interfranjei, atunci  $\alpha i = \frac{\lambda}{2}$  și  $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$ .

Franjele apar sub forma unor drepte paralele cu axa  $A$ , echidistante și localizate pe conul de aer. Să considerăm franja dispusă la distanța  $x$  de  $A$ . Dacă diferența de drum:

$\Delta = 2\alpha x + \frac{\lambda}{2}$  reprezintă o mărime constantă se obține:  $\frac{d\Delta}{d\alpha} + \frac{dx}{d\alpha} = 0$ . Dacă

unghiul  $\alpha$  crește cu  $d\alpha$ , această franjă se deplasează spre  $A$  cu  $dx = -x \frac{d\alpha}{\alpha}$ , în așa

fel încât mărimea  $\Delta$  rămâne constantă, cu atât mai mult cu cât se află mai departe de  $A$ . La marginea opusă lui  $A$  apar franje, iar la marginea dinspre  $A$  acestea dispar.

Apar mai multe franje decât dispar, deci se îndesesc, deoarece mărimea interfranjei  $i$  scade. Pentru  $x = r$ , deplasarea trebuie să fie egală cu:

$$dx = -\frac{i}{20} = -\frac{\lambda}{40\alpha}$$

$$d\alpha = -\frac{\alpha}{x} dx = \frac{\alpha}{r} \frac{\lambda}{40\alpha} = \frac{\lambda}{40r} = 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,0722''$$

2. - Cu cât trebuie traslată oglinda  $M_2$  de-a lungul normalei pentru a se obține aceeași deplasare a franjelor ca și la rotația precedentă de unghi  $d\alpha$ ?

R: În cazul rotației de unghi  $d\alpha$ , drumul optic a variat cu:  $d\Delta = 2\alpha d\alpha$ , iar la translație variația este:  $d\Delta = 2dy$ .

Deci:  $dy = x d\alpha$ . Pentru  $x = r$  și  $d\alpha = \frac{\lambda}{40r}$  se obține:

$$dy = r \frac{\lambda}{40r} = \frac{\lambda}{40} = 0,014 \mu\text{m}$$

3. - Luneta  $L$  permite să se separe în planul franjelor de interferență un interval egal cu  $0,1 \text{ mm}$ . Să se stabilească valoarea maximă a unghiului  $\alpha$  pentru care încă se poate obține un sistem de franje care să poată fi separat de lunetă?

R: Când valoarea mărimii  $\alpha$  crește, mărimea interfranjei  $i$  scade, sistemul de franje ne mai putând fi distins prin lunetă pentru  $i_{\min} = 0,1 \text{ mm}$ . Deci valoarea maximă a mărimii  $\alpha$  este:

$$\alpha_M = \frac{\lambda}{2i_{\min}} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 9'37''$$

### Inelele lui Newton localizate

1. - Dispozitivul pentru obținerea inelelor lui Newton este constituit dintr-o lentilă plan-convexă așezată cu fața ei sferică pe o suprafață plană de sticlă, contactul fiind perfect și fără deformări (fig. 41). Se iluminează cu radiația de lungime de undă  $\lambda = 550 \text{ nm}$ , iar observarea se face sub incidență normală. Se constată că primul inel întunecat ce înconjoară punctul central are un diametru egal cu  $2 \text{ mm}$ . Să se determine convergența lentilei. Indicele de refracție  $n = 1,53$ .

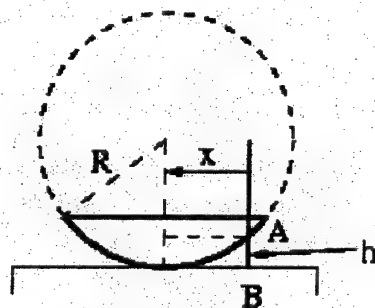


Fig. 41

**R:** Diferența de drum optic între fasciculul reflectat de suprafața curbă și cel reflectat de suprafața plană, sub incidență normală este:

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2}$$

$\left(\frac{\lambda}{2}\right)$  reprezintă întârzierea introdusă la reflexia aer/sticlă în punctul B).

Pe de altă parte:  $x^2 = (2R - h)h \cong 2Rh$ ,

Deci: 
$$\Delta = \frac{x^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$$

Inelele întunecate se obțin pentru:  $\frac{x_k^2}{R} = k\lambda$ , deci:

$$x_k = \sqrt{R\lambda} \sqrt{k} = x_1 \sqrt{k}, \text{ de unde: } \frac{\lambda}{x_1^2} = \frac{1}{R}$$

Convergența lentilei plan-convexe:

$$C = \frac{1}{f} = (n-1) \frac{1}{R} = (n-1) \frac{\lambda}{x_1^2} = 0,2915 \text{ dioptri}$$

2. - Indicele de refracție al lamei de sticlă este egal cu:  $n'' = 1,73$ ; între lentilă și lama de sticlă se introduce un lichid al cărui indice de refracție este egal cu  $n' = 1,625$ . Ce modificări apar în tabloul de interferență? Care este diametrul primului inel întunecat?

**R:** Deoarece  $n = 1,55 < n' = 1,625 < n'' = 1,73$ , la cele două reflexii în punctele A și B se introduce o diferență de drum optic suplimentară egal cu  $\frac{\lambda}{2}$  și în acest mod, se compensează. Noua diferență de drum devine:

$$\Delta' = 2n'h = n' \frac{x^2}{R}$$

Centrul inelelor devine luminos (în lumină albă pata luminoasă centrală va fi irizată pe margini). Poziția primului inel întunecat din sistemul anterior se schimbă foarte puțin, apropiindu-se de centru, însă devine al doilea inel întunecat în noul sistem

de inele. Primul inel  $x'_1$  va corespunde unei diferențe de drum optic egale cu  $\frac{\lambda}{2n'}$  ( $k = 0$ ):

$$2n'h = \frac{\lambda}{2} = n' \frac{x'^2}{R}, \text{ de unde: } x'_1 = \sqrt{\frac{R\lambda}{2n'}} = \frac{x_1}{\sqrt{2n'}} = 0,55 \text{ mm},$$

iar diametrul:  $2x'_1 = 1,1 \text{ mm}$ . Din fig. 42 se observă că există o poziție care nu suferă nici o modificare la adăugarea lichidului:

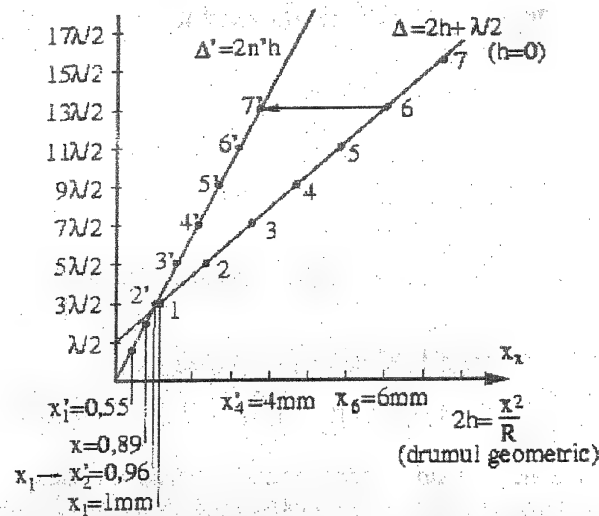


Fig. 42

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = 2n'h + 0 = \Delta', \text{ de unde: } 2h(n'-1) = \frac{\lambda}{2} = \frac{x^2}{R}(n'-1), \text{ deci:}$$

$$x = \sqrt{\frac{R\lambda}{2(n'-1)}} = 0,89 \text{ mm.}$$

Pentru inelul 2' ( $k=1$ ):

$$2hn' = 3\frac{\lambda}{2} = \frac{x_2'^2}{R}n', \text{ deci: } x_2' = 0,96 \text{ mm} (x_1 = 1 \text{ mm});$$

Pentru inelul 7' ( $k=6$ ):

$$2hn' = 3\frac{\lambda}{2} = \frac{x_7'^2}{R}n' \Rightarrow x_7'^2 = \frac{13}{2n'}R\lambda = \frac{13}{2n'}x_1^2 = \frac{13}{2\frac{13}{8}} = 4x_1^2, \\ (x_7' = 2 \text{ mm}).$$

Deci poziția inelului 7' (sistemul de franje obținut când se adaugă lichid) va coincide cu poziția inelului 4 (fără lichid); prin urmare la adăugarea lichidului inelele se îndesesc.

În general:  $x'_k = \sqrt{2k+1} \frac{x_1}{\sqrt{2n'}}$ , unde:  $k = 0, 1, 2, \dots$

Trebuie subliniat că datorită reflexiilor sticlă/lichid și lichid/sticlă, fenomenul va fi mult mai puțin luminos. Pe de altă parte amplitudinea undelor ce interferează, deși se micșorează mult reflexia, devin aproximativ egale, ceea ce determină creșterea contrastului figurii de interferență (se va demonstra luând în considerare coeficienții de transmisie și reflexie).

3. - Se suprimă lichidul și se așează fața curbă a lentilei plan-convexe pe fața concavă a unei lentile plan-concave de același indice de refracție  $n$ , dar de curbura mai mică (fig. 43). Ce relație trebuie să existe între convergențele  $C'$  și  $C''$  ale celor două lentile pentru ca primul inel negru să aibă același diametru ca și în primul caz. Să se calculeze diametrul inelului de ordin  $k$ .

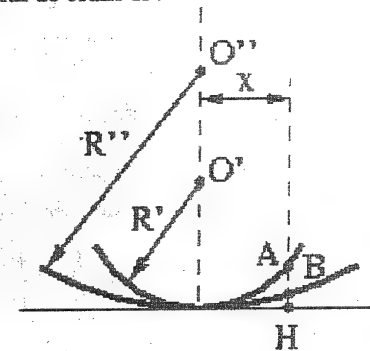


Fig. 43

R: Diferența de drum optic este:  $\Delta = 2\overline{AB} + \frac{\lambda}{2} = 2h + \frac{\lambda}{2},$

însă:  $2\overline{AH} = \frac{x^2}{R'}$  și  $2\overline{BH} = \frac{x^2}{R''}$ , de unde:  $2\overline{AB} = x^2 \left( \frac{1}{R'} - \frac{1}{R''} \right).$

Pentru a obține același sistem de inele de interferență ca în primul caz este

necesar ca:  $\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''} = \frac{1}{R},$

Dar:  $C' = (n-1)\frac{1}{R'}$  și  $C'' = -(n-1)\frac{1}{R''}$ , deci este necesar ca:

$$C = C' + C'' = 0,2915 \text{ dioptri.}$$

Diametrul inelului de ordin  $k$ :



$$2x_k = 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{R'R''}{R''-R'}} \lambda = 2\sqrt{k} x_1 = 2\sqrt{k} \text{ mm}.$$

4. - Revenind la sistemul din primul caz, să se explice ce se întâmplă când cele două suprafețe, care la început au fost în contact, se depărtează progresiv una de alta.

R: Să presupunem că la un moment dat distanța dintre placă și vârful lentilei este egală cu  $h_0$ , deci:

$$\Delta = 2(h + h_0) + \frac{\lambda}{2}.$$

Deci:  $\delta\Delta = 2h_0$ , iar ordinul de interferență  $\Delta p = \frac{2h_0}{\lambda} 2h_0$ , indiferent de distanța

$h$ , deci și de  $x$ . Odată cu creșterea lui  $h_0$  inelele se contractă, deplasându-se spre centru, unde dispar. De fiecare dată când  $h_0$  crește cu  $\frac{\lambda}{2}$ , în centru dispare un inel, iar următorul îi ia locul, în timp ce la marginea lentilei apare un nou inel. Aspectul figurii de interferență nu se schimbă. Dacă  $h_0$  variază în domeniul  $(0 \div 2) \text{ mm}$ , ordinul de

interferență în centru variază de la 0,5 la  $p_0 = \frac{1}{2} + \frac{4000}{0,55} = 0,5 + 7272,72$ ,

adică în centru dispar 7272 inele întunecate.

5. - Distanța  $h_0$  fiind egală cu 2 mm, se introduce dispozitivul sub un clopot de sticlă și se variază presiunea. Să se analizeze ce se întâmplă când se micșorează continuu presiunea până la zero. Se consideră  $n_{\text{aer}} = 1,0003$ , iar temperatura este constantă.

R: În centru, ordinul de interferență devine:

$$p'_0 = \frac{1}{2} + \frac{2h_0}{n\lambda}, \text{ deoarece } \lambda_0 = n\lambda, \text{ unde: } n_{\text{aer}} = 1,0003.$$

$$p'_0 = 0,5 + \frac{7272,72}{1,0003} = 0,5 + 7270,54$$

(ordinul de interferență în prezența aerului).

Deci, când se face vid, în centru reapar două inele negre (7271,5 și 7272,5) și două inele luminoase (7272 și 7273), iar al treilea inel luminos (7271) este pe cale de apariție. Celelalte inele ale tabloului de interferență se dilată. În același timp ele se răresc, dar într-un mod imperceptibil.

Intr-adevăr:

$$\Delta p = p - p' = \left(p - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cong p(n-1) = 3 \cdot 10^{-4} p \text{ (pentru } p \text{ mare)}$$

Dacă  $p = 7272$ , atunci  $\Delta p = 2,1816$ , iar pentru  $p = 7300$ ,  $\Delta p = 2,19$  (pentru 28 de inele) prin urmare variația lui  $\Delta p$ , (deci și distanțarea inelelor) este foarte mică.

### Inelele lui Newton. Variația temperaturii

1. - O lentilă subțire plan-convexă cu distanța focală egală cu 2m este iluminată cu un fascicul paralel de lumină monocromatică, incident normal pe suprafața plană (fig. 44). Să se analizeze fenomenul de interferență obținut în lumină reflectată; să se arate că se obține un sistem de inele. Presupunând grosimea lentilei astfel încât la centru se obține maxim de intensitate, să se calculeze diametrele primelor cinci inele luminoase ( $\lambda = 546 \text{ nm}$ , iar indicele de refracție al lentilei pentru această lungime de undă este  $n = 1,52$ ).

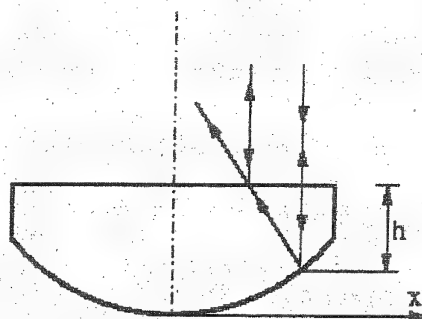


Fig. 44

**R:** Interferența are loc între cele două fascicule ce rezultă din reflexia pe cele două suprafețe. Amplitudinile celor două fascicule sunt sensibil egale. Deoarece sistemul prezintă aproape o simetrie cilindrică, figura de interferență este formată din inele al căror centru se află pe axa optică. Inelele sunt localizate pe suprafața plană a

lentilei. Grosimea lentilei este în așa fel încât la centru se obține maxim de lumină. La o distanță  $x$  față de centru vom găsi un inel luminos, deci:

$$\Delta = k\lambda \quad (\text{odată cu creșterea valorii mărimii } x \text{ diferența de drum scade}).$$

Deoarece:

$$2nh = k\lambda \text{ și } x^2 = (2R - h)h \approx 2Rh,$$

diametrul inelelor este:

$$2x = 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{R\lambda}{n}} = 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{n-1}{n}} f\lambda = 1,222\sqrt{k} \text{ mm}, \quad (R = (n-1)f).$$

Mărimea diametrelor inelelor este: 1,222; 1,728; 2,116; 2,444; 2,732. Lățimea spectrală a radiației  $\lambda = 546 \text{ nm}$  verde a Hg este suficient de mică astfel încât se poate obține un ordin de interferență de 770.000, tabloul de interferență fiind încă vizibil. Acestui ordin de interferență îi corespunde o diferență de drum optic egală cu:

$$\Delta = 770000 \cdot 546 \cdot 10^{-7} \text{ cm} = 42,042 \text{ cm}.$$

Grosimea lentilei la centru poate ajunge până la:  $\frac{42}{2 \cdot 1,52} \approx 14 \text{ cm}.$

Lățimea liniei spectrale este:  $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N} = \frac{5460 \text{ Å}}{770000} = 0,007 \text{ Å}.$

2. - În locul lentilei plan convexe se utilizează o lentilă convergentă oarecare, de aceeași distanță focală (fig. 45). Să se arate că fenomenul rămâne același.

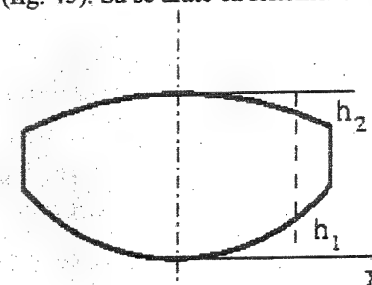


Fig. 45

**R:** Considerând relațiile:

$$\Delta = 2n(h_1 + h_2) = k\lambda \text{ și } x^2 \approx 2R_1h_1 + 2R_2h_2,$$

$$n x^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = k \lambda \text{ și } \frac{1}{f} = (n-1) x^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

se obține același rezultat:  $2x^2 = 2\sqrt{k} \sqrt{\frac{n-1}{n}} f \lambda$ .

3. - Să se analizeze ce se întâmplă când variază temperatura. Coeficientul de dilatare liniară a sticlei este  $\alpha = 9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$ , iar indicele de refracție al sticlei crește cu  $3 \cdot 10^{-6}$  la creșterea temperaturii cu  $1^\circ \text{C}$ . Să se calculeze variația temperaturii corespunzătoare apariției unui nou inel?

**R:** Diferența de drum optic la centru este:  $\Delta - \frac{\lambda}{2} = 2nh = k\lambda$ .

Variația drumului optic determină variația temperaturii:

$$\delta\Delta = 2h \left( \frac{n}{h} \frac{dh}{dT} + \frac{dn}{dT} \right) \Delta T = \lambda \Delta k.$$

Deoarece contribuția coeficienților  $\alpha = \frac{1}{h} \frac{dh}{dT} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$  și

$\frac{dn}{dT} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$ , determină creșterea drumului optic, respectiv a ordinului de interferență, în centru vor apărea inele noi, care ulterior se dilată. Un inel nou apare pentru  $\Delta k = 1$ , deci:

$$2h \left( \frac{n}{h} \frac{dh}{dT} + \frac{dn}{dT} \right) \Delta T = \lambda.$$

De unde: 
$$\Delta T = \frac{\lambda}{2h(9 \cdot 10^{-6}n + 3 \cdot 10^{-6})} = 5,46^\circ \text{C}$$

### Inelele lui Newton. Dilatometru interferențial

1. - Un bloc de sticlă (B) cu fețele plan-paralele este așezat pe un suport plan S; deasupra lui B, pe tijele T de lungime egală, este așezată o lentilă L a cărei rază de curbura este mare. Între lentila L și fața superioară a lui B se formează inelele lui Newton în lumină monocromatică ( $\lambda$ ) (fig. 46). La temperatura de  $0^\circ \text{C}$  grosimea blocului B este egală exact cu 1 cm, iar la temperatura  $t^\circ \text{C}$  grosimea devine  $e_0(1 + 10^{-5}t + 10^{-8}t^2)$ . Dilatarea suportilor T se consideră neglijabilă. Se variază încet temperatura ansamblului în domeniul  $(0 \div 100)^\circ \text{C}$ . Să se descrie modificările observate în tabloul sistemului inelelor de interferență?

La  $0^\circ \text{C}$ , cu ajutorul unui dispozitiv de măsură, se stabilește că valoarea relativă a diametrelor primelor două inele negre la centru este egală cu 1 respectiv 2. Să se calculeze din 10 în 10 grade numărul inelelor negre care apar la centru și diametrul primului inel. Care este raza reală a primului inel negru la temperatura de  $0^\circ \text{C}$ , dacă raza de curbura a lentilei este de 30 m? Cum intervine în calcul indicele de refracție al aerului, dacă valoarea lungimii de undă a radiației este dată pentru vid ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ )?

**R:** Sistemul de inele de interferență se observă în lumină reflectată sub incidență normală. Pentru aceasta se poate utiliza o lamă de sticlă *semitransparentă* așezată la  $45^\circ$ , o prismă cu reflexie totală sau iluminarea și observarea se face sub un unghi mic față de normală. Inelele sunt localizate pe fața interioară a lentilei, iar observarea se face cu un ocular micrometric focalizat pe această față.



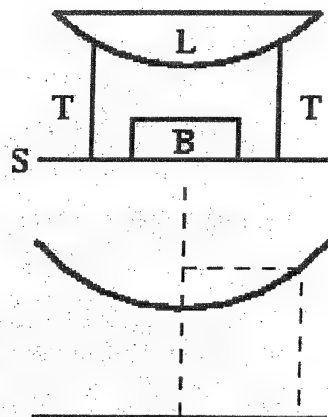


Fig. 46

La  $0^\circ \text{C}$  diferența de drum optic este:

$$\Delta' = 2a + \frac{\rho^2}{R} + \frac{\lambda}{2},$$

iar ordinul de interferență:  $p' = \frac{\Delta'}{\lambda} = \frac{2a}{\lambda} + \frac{\rho^2}{R\lambda} + \frac{1}{2} = k' + \varepsilon'$ .

Pentru simplificare vom considera:

$$\Delta = \Delta' - \frac{\lambda}{2} = 2a + \frac{\rho^2}{R}, \quad p = p' - \frac{1}{2} = \frac{2a}{\lambda} + \frac{\rho^2}{R\lambda} = k + \varepsilon,$$

unde  $\varepsilon$  și  $\varepsilon'$  sunt excidenții fracționari. În aceste condiții inelele negre le vor corepunde numere  $p$  întregi (fig. 47).

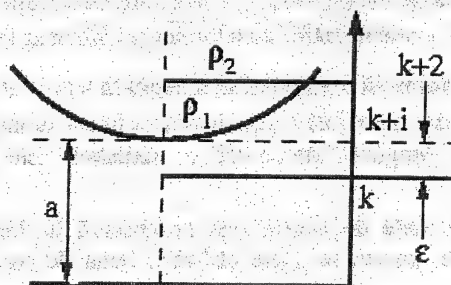


Fig. 47

$$\text{La centru } (\rho = 0), \text{ se obține: } p_0 = \frac{2a}{\lambda} = k + \varepsilon_0 \quad (1)$$

Pentru primul inel întunecat:

$$\frac{2a}{\lambda} + \frac{\rho_1^2}{R\lambda} = k + 1 \quad (2)$$

iar pentru al doilea inel întunecat:

$$\frac{2a}{\lambda} + \frac{\rho_2^2}{R\lambda} = k + 2,$$

$$\text{de unde se obține: } \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{R\lambda} = 1, \text{ însă: } \rho_2 = 2\rho_1, \text{ deci: } \rho_2^2 = \frac{R\lambda}{4} 2\rho_1.$$

$$\text{Diferența (2) - (1) conduce la: } \frac{\rho_1^2}{R\lambda} = 1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{3}, \text{ deci: } \varepsilon_0 = \frac{2}{3}. \text{ Însă}$$

trebuie considerată și întârzierea introdusă de reflexia pe suprafața sticlă/aer, deci:

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Raza primului inel: } \rho_1 = \sqrt{\frac{R\lambda}{3}} = 2,23606.$$

Dacă se încălzește blocul B de sticlă, atunci mărimea  $\varepsilon$  crește, corespunzător

$a$  scade și, deoarece:  $\Delta = 2a + \frac{\rho^2}{2R} = k\lambda$ ,  $\rho$  crește, deci inelele se "dilată". Câte inele vor apare la centru tot atâtea vor dispărea la margine.

Dacă  $\Delta e = \frac{\lambda}{2}$ , atunci  $\Delta a = -\frac{\lambda}{2}$ , iar  $-\Delta p = -1$ , prin urmare fiecare inel nou ce apare va ocupa exact locul precedentului care s-a dilatat.

$$-\Delta p = \frac{2\Delta e}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} (e_t - e_0) = \frac{2e_0}{\lambda} (10^{-5} t + 10^{-8} t^2) =$$

Deci:

$$= \frac{2 \cdot 10^4}{0,5} (10^{-4} \text{ m} + 10^{-6} \text{ m}^2) = 4 \text{ m} + \frac{4 \text{ m}^2}{100}$$

deoarece considerăm variația temperaturii din 10 în 10 grade ( $\Delta t = 10 \text{ m}$ ). Variația numărului de inele va fi următoarea:

Anterior s-a stabilit că la  $0^\circ \text{C}$ :  $\frac{\rho_1^2}{R\lambda} = 1 - \varepsilon$ , respectiv la  $t^\circ \text{C}$ :

$$\frac{\rho_1'^2}{R\lambda} = 1 - \varepsilon', \text{ de unde: } \frac{\rho_1'}{\rho_1} = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon'}{1 - \varepsilon}} = \sqrt{3(1 - \varepsilon')}.$$

Dacă valoarea indicelui de refracție al aerului la  $0^\circ \text{C}$  se consideră egală cu 1,0003 în loc de valoarea 1 așa cum s-a considerat mai sus atunci valoarea razei inelelor de interferență se modifică puțin, însă nu se modifică valoarea excedentului fracționar  $\varepsilon_0$ .

$$m = 0 \quad p = 0 \quad p = k + \frac{2}{3} \quad \begin{array}{l} \text{numărul} \\ \text{de inele} \\ \text{care apare} \\ \text{la centru} \end{array} \quad \frac{\rho_1'}{\rho_1} = \frac{1 - \varepsilon'}{1 - \varepsilon}$$

1	4,04	$k - 4 + \underbrace{\left(\frac{2}{3} - 0,04\right)}_{\varepsilon_0}$	4	1,058
2	8,16	$k - 8 + 0,50$	4	1,224
3	12,36	$k - 12 + 0,30$	4	1,442
4	16,64	$k - 16 + 0,02$	4	1,708
5	21	$k - 21 + 0,66$	5	1
6	25,44	$k - 25 + 0,22$	4	1,524
7	29,96	$k - 30 + 0,70$	5	0,937
8	34,56	$k - 34 + 0,10$	4	1,637
9	39,24	$k - 39 + 0,42$	5	1,315
10	44	$k - 44 + 0,66$	5	1

În acest caz:  $\rho_1' = \sqrt{\frac{R\lambda_0}{3n}}$ , iar dacă se logaritmază și diferențiază, se

obține:

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} = -\frac{1}{2} \frac{dn}{n} = -15 \cdot 10^{-5}.$$

$$\text{Deci: } \rho_1' = \rho_1 + d\rho_1 = \rho_1(1 - 15 \cdot 10^{-5}) = 2,23586 \text{ mm}$$

Dacă crește temperatura trebuie considerat faptul că indicele de refracție al aerului variază cu temperatura conform legii lui Gladston:  $\frac{n-1}{d} = ct$ , unde  $d$  reprezintă densitatea aerului. Pentru un gram de aer considerat drept gaz perfect avem:

$$pV = \frac{p}{d} = RT.$$

La presiune constantă:  $dT = ct$ , deci:

$$(n-1)T = ct = (n_0-1)T_0.$$

$$\text{de unde: } n = 1 + (n_0-1) \frac{T_0}{T} = 1 + 3 \cdot 10^{-4} \frac{273}{273+t}.$$

Toate rezultatele se vor modifica deoarece  $\Delta p$  depinde de  $n$  prin intermediul lungimii de undă.

2. - Fețele plane ale aceleiași lame  $B$  se semiarginteză. Utilizându-se această lamă se obțin inele de interferență localizate la infinit și se măsoară diametrele lor. La  $0^\circ \text{C}$  primele două inele luminoase de la centru au diametrele relative  $\sqrt{2}$ , respectiv  $\sqrt{7}$ . Se încălzește lama la  $10^\circ \text{C}$ ; se observă că 8 inele defilează la centru, iar diametrul relativ al primelor două inele centrale devine 1, respectiv  $\sqrt{3}$ . Considerând faptul că valoarea indicelui de refracție al lamei de sticlă la  $0^\circ \text{C}$  este  $1,50 \pm 2 \cdot 10^{-5}$ , să se calculeze variația acestuia în domeniul  $(0 \div 10)^\circ \text{C}$ .

**R:** Pentru observarea inelelor de interferență la infinit se poate utiliza dispozitivul optic prezentat schematic în fig. 48.

Diferența de drum între  $R_1$  și  $R_2$  este:

$$\Delta = 2nh \cos r = 2nh \left(1 - 2 \sin^2 \frac{r}{2}\right) \cong 2nh \left(1 - \frac{i}{2n}\right),$$

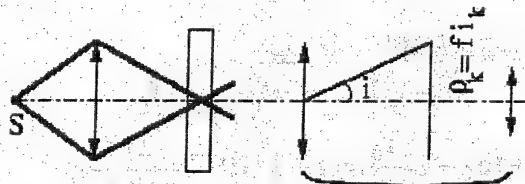
iar ordinul de interferență:  $p = \frac{2nh}{\lambda} - \frac{h}{n\lambda} i^2$ , de unde rezultă că atunci când crește valoarea unghiului de incidență  $i$ , valoarea ordinului de interferență se micșorează.

În centrul câmpului se obține:  $p_0 = \frac{2nh}{\lambda} = k + \varepsilon_0$ ;

Pentru primul inel de interferență:  $\frac{2nh}{\lambda} - \frac{h}{n\lambda} i_1^2 = k$ ;

Pentru al doilea inel:  $\frac{2nh}{\lambda} - \frac{h}{n\lambda} i_2^2 = k - 1$ .

De unde:  $\frac{h}{n\lambda} (i_2^2 - i_1^2) = 1$ , dar:  $\frac{i_2}{i_1} = \sqrt{\frac{7}{2}}$ , deci:  $i_2^2 = \frac{2n\lambda}{5h}$ .



luneta reglata la infinit

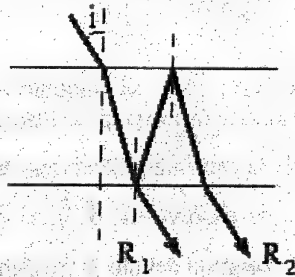


Fig. 48

Fig. 49

La fel:  $\varepsilon_0 = \frac{h}{n\lambda} i_1^2 = \frac{2}{5}$ .

Un calcul analog permite determinarea noului ordin de interferență atunci când temperatura crește cu  $10^\circ \text{C}$ .

Deoarece:  $\frac{i_2'}{i_1'} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ , se obține:  $i_2'^2 - i_1'^2 = 2i_1'^2$  și  $2i_1'^2 \frac{h'}{n'\lambda} = 1$ , deci:

$\varepsilon_0' = \frac{h'}{n'\lambda} i_1'^2 = \frac{1}{2}$ , și se mai observă în centru "defilează" 8 inele. În problemă

nu se subliniază dacă inelele se dilată sau se contractă, ambele cazuri fiind posibile funcție de proprietățile sticlei.

Să presupunem că ordinul de interferență crește la centru: inițial a fost  $k + 0,4$  și a devenit  $k + 8 + 0,5$ , deci:  $\delta p_0 = 8,1$ .

Deci:  $\delta \Delta = \lambda \delta p_0 = \delta(2nh) = 2h_0 \Delta n + 2n_0 \Delta h$  sau:

$$8,1 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 2 \cdot 10 n + 2 n_0 \cdot 10 (10^{-4} + 10^{-6}),$$

unde:  $\delta h_0 = h_0 \delta t = 10 \text{ mm} (10^{-5} \text{ gr}^{-1} 10 \text{ gr} + 10^{-8} \text{ gr}^{-2} 100 \text{ gr}^{-2})$ .

Deci:  $\delta n = (0,51 \pm 2,02 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-4}$ .

Dacă se consideră că la centru ordinul de interferență scade: a fost  $k + 0,4$  și devine  $k - 8 + 0,5$ , deci  $\delta p_0 = -7,9$ , atunci se obține:

$$\delta n = -(3,49 \pm 2,02 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-4}.$$



### Măsurarea unghiurilor mici prin metode interferențiale

Un indicator de poziție orizontală este format dintr-o cuvă cilindrică a cărei parte inferioară este convexă spre interior și conține un strat subțire de ulei. Partea convexă este argintată și poate reflecta un fascicul de lumină monocromatică ( $\lambda = 560 \text{ nm}$ ), incident normal pe stratul de ulei ( $n = 1,4$ ). În acest dispozitiv se formează inelele lui Newton; grosimea stratului de ulei este aleasă astfel încât centrul sistemului de inele este negru. Pe partea inferioară a cuvei este trasat un reper care coincide cu centrul inelelor dacă dispozitivul este așezat pe o suprafață orizontală. Dacă suprafața prezintă o înclinare  $\alpha$ , atunci sistemul de inele se deplasează în raport cu reperul și se măsoară raportul dintre această deplasare  $x$  și raza  $\rho$  a primului inel. Se notează cu  $R$  raza de curbura a părții inferioare a cuvei.

1. - Să se determine expresia razei  $\rho$  în funcție de  $R$ ,  $\lambda$  și  $n$ .

**R:** Pentru a obține un contrast maxim al figurii de interferență (vizibilitate maximă) partea inferioară a cuvei este *semiargintată*, ceea ce asigură egalitatea aproximativă a intensității fasciculului reflectat pe stratul de ulei cu cea a celui reflectat pe partea inferioară a cuvei. La o distanță oarecare  $\rho$  de axa cuvei, grosimea stratului de ulei este egală cu (fig. 50):

$$\rho^2 = y(2R - y) \approx 2Ry,$$

iar diferența de drum optic:  $\Delta = 2ny = \frac{n\rho^2}{R}$ .

Deoarece grosimea stratului de ulei la centru (pentru  $\alpha = 0$ ) are o valoare astfel încât centrul inelelor de interferență este negru, atunci când se trece de la centrul inelelor la primul inel întunecat se poate scrie:

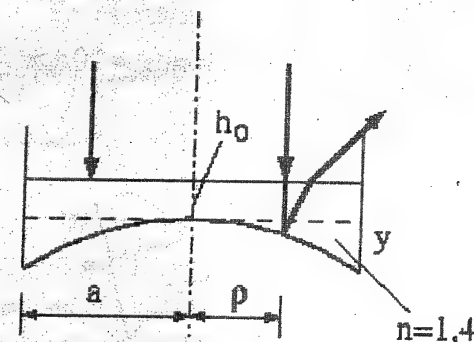


Fig. 50

$$\Delta = \lambda = \frac{n\rho_1^2}{R}, \text{ de unde: } \rho_1 = \sqrt{\frac{R\lambda}{n}}.$$

Raza următoarelor inele negre este dată de relația:

$$\rho_k = \sqrt{k} \sqrt{\frac{R\lambda}{n}},$$

adică spre margini inelele se îndesesc.

2. - Să se exprime raportul dintre înclinarea  $\alpha$  și valoarea măsurată  $\frac{x}{\rho}$ . Să se

arate că este indicată o valoare  $R$  cât mai mare posibil.

**R:** Atunci când dispozitivul nu se află pe un plan orizontal, suprafața AOB (orizontală) a uleiului ocupă poziția A'OB' (fig. 51). Centrul inelelor de interferență se deplasează din C' (unde se află trasat reperul) în C, deplasarea fiind egală cu:

$$x = R \sin \alpha \approx R.$$

Grosimea stratului de ulei corespunzătoare centrului figurii de interferență se modifică foarte puțin dacă unghiul  $\alpha$  este mic:

$$R + h'_0 = (R + h_0) \cos \alpha \approx R + h_0.$$

Prin urmare centrul figurii de interferență rămâne tot întunecat, iar raza primului inel nu se schimbă. Deci:

$$\frac{x}{\rho_1} = \alpha R \sqrt{\frac{n}{R\lambda}} = \alpha \sqrt{\frac{nR}{\lambda}}, \text{ de unde: } \frac{\alpha}{x/\rho} = \sqrt{\frac{\lambda}{nR}} = \frac{1}{s}.$$

Pentru a sesiza o valoare cât mai mică a înclinării  $\alpha$ , este necesar ca sensibilitatea  $S$ , proporțională cu  $\sqrt{R}$ , să fie cât mai mare. Însă creșterea mărimii  $R$  determină creșterea lui  $\rho_1$  care este limitată de raza ( $a$ ) a cilindrului, adică:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{R\lambda}{n}} < a, \text{ de unde: } R < \frac{na^2}{\lambda}, \text{ pentru } a = 10\text{cm}, R < 25\text{km}.$$

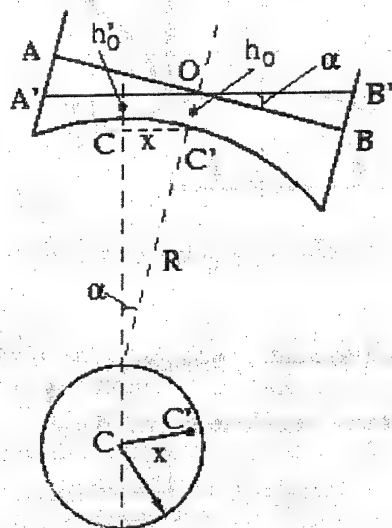


Fig. 51

Pe de altă parte atunci când  $\rho$  crește, inelele devin din ce în ce mai puțin nete din cauza repartiției luminii în interiorul figurii de interferență și, ca urmare, evaluarea mărimii  $\frac{x}{\rho}$  devine mai dificilă. În plus, pentru ca centrul figurii de interferență să rămână întunecat este necesar ca variația grosimii peliculei de ulei la centru să fie neglijabilă:

$$(R + h_0) - (R + h'_0) \cos \alpha = (R + h_0) - (R + h_0) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \cong \frac{R\alpha}{2}$$

În acest caz variația ordinului de interferență trebuie să îndeplinească condiția:

$$dp = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2R\alpha^2}{2\lambda} < \frac{1}{50}$$

Pentru  $\alpha = 1'' = 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$  este necesar ca  $R < 400\text{m}$ .

3. - Se consideră  $\rho_1 = 10\text{mm}$ . Să se analizeze dacă se poate pune în evidență o înclinare de  $\alpha = 1''$  față de orizontală.

$$R: \text{ Dacă } \rho_1 = 10\text{mm} \text{ rezultă: } R = \frac{n\rho_1^2}{\lambda} = 250\text{m}, \text{ deci}$$

$x = R\alpha = 250 \cdot 10^3 \cdot 4,85 \cdot 10^{-6} = 1,21\text{mm}$ , prin urmare se poate pune în evidență cu ușurință o înclinare  $\alpha = 1''$  față de orizontală.

//////

O pană de sticlă  $A$  cu indicele de refracție  $n = 1,5$  și cu fețele *semiargintate* și foarte puțin înclinate este iluminată de un fascicul paralel de lumină monocromatică cu  $\lambda = 500\text{nm}$  dat de colimatorul  $SL_1$ . Fixând ochiul în focarul  $O$  al lentilei  $L_2$ , pe lamă se observă franje de egală grosime. Această lamă face parte dintr-un echipaj, mobil în jurul unei axe verticale, destinat măsurării unor deviații mici. Muchia penei  $A$  este orientată vertical. Se notează cu  $i$  unghiul de incidență și cu  $\theta$  unghiul de rotație necesar pentru a face ca o franjă să treacă prin fața unui reper trasat pe lamă atunci când aceasta se rotește (fig. 52).

1. - Să se evalueze unghiul  $\theta$  funcție de  $n$ ,  $h$ ,  $\lambda$  și  $i$ . Se consideră:

$$h = 1\text{cm}, i = 30^\circ, i = 45^\circ, i = 60^\circ.$$

$R$ : Diferența de drum geometric pentru două raze transmise și care interferează în pana de sticlă este:  $\Delta = 2nh \cos r$ . Franjele sunt rectilinii, paralele cu muchia și sunt localizate pe pană, iar pentru a le observa, trebuie acomodat ochiul. Deoarece interferează o rază transmisă și una reflectată, pentru ca intensitățile acestor raze să fie aproximativ egale este necesar ca fețele lamei să fie *semiargintate*.

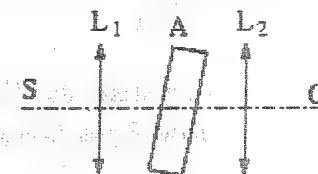


Fig. 52

Diferența de drum  $\Delta$ , pentru o incidență dată, depinde, prin intermediul lui  $h$ , de distanța de la muchia prismei la locul de incidență. Când lama se rotește în jurul unui ax vertical  $Z$  se regăsește aceeași stare de interferență în fiecare punct, de fiecare dată când  $\Delta$  variază cu  $\lambda$ .

$$\Delta = 2nh \cos r = 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 i}, \text{ considerând: } \sin i = n \sin r.$$

Dacă lama se rotește, unghiul de incidență variază și:

$$d\Delta = \frac{2h \sin i \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} di, \text{ de unde: } dp = \frac{h}{\lambda} \frac{\sin 2i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} di.$$

Atunci când ordinul de interferență variază cu unitatea  $dp = 1$ , unghiul de incidență variază cu  $d\alpha = \theta$ , deci:

$$\theta = \pm \frac{h}{\lambda} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\sin 2i}.$$

Deoarece este urmărită variația ordinului de interferență față de un reper trasat pe lamă, se poate considera  $h = ct$ . Dacă  $h = 1 \text{ cm}$  și  $i = 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ$ , valorile unghiului  $\theta$  sunt corespunzător:  $\theta = 16''8; 13''6; 14''6$ .

2. - Fie  $dp$  variația ordinului de interferență într-un punct al lamei produsă de o rotație mică  $di$ . Să se construiască curba sensibilității:

$$y = \frac{\lambda dp}{h di} = F(i).$$

R: Din relațiile de mai sus rezultă  $di = \theta dp$ , deci:

$$y = \frac{\lambda dp}{h di} = \frac{\lambda}{h \theta} = \frac{\sin 2i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Reprezentarea grafică este dată în fig. 53?. Se observa că maximum de sensibilitate corespunde aproximativ la  $i = 50^\circ$ , iar  $y_M \cong \frac{3}{4}$ .

3. - Considerând că se pot observa deplasări de  $i/50$  dintr-o franjă, să se determine care este cea mai mică rotație ce poate fi pusă în evidență. Să se compare cu alte metode.

R: Deoarece  $dp = \frac{1}{50}$  se obține:

$$d\alpha = \frac{\lambda dp}{h y_M} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{10} \frac{4}{3 \cdot 50} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-6} \text{ rad.}$$

În cazul oglinzilor rotitoare: considerăm o oglindă cu raza de curbură egală cu  $2m$ , iar lectura se face pe o riglă divizată în  $0,1 \text{ mm}$ , deci:

$$d\alpha' = \frac{\lambda dp}{h y_M} = \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{1}{2000} = \frac{10^{-4}}{4} \text{ rad.}$$

Raportul  $\frac{d\alpha'}{d\alpha} \cong 20$ , deci această metodă este de 20 de ori mai sensibilă decât metoda oglinzii rotitoare.

### Interferometrul Michelson - 1

Un interferometru Michelson este iluminat de o sursă luminoasă punctuală  $S$ . Oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  ale interferometrului sunt așezate la o distanță  $D$  de punctul  $I$ , care reprezintă punctul de întâlnire cu o placă *semiargintată*  $G$  al unei raze ce pleacă din  $S$  și este normală pe oglinda  $M_1$ . Sursa  $S$  față de punctul  $I$  de asemenea se află la distanța  $D$ . Oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  sunt perpendiculare între ele, iar lama  $G$  este dispusă sub un unghi de  $45^\circ$  față de cele două oglinzi (fig. 53). Oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  se rotesc cu același unghi  $\alpha$  mic, în același sens în jurul axelor  $O_1$  și  $O_2$  perpendiculare pe figură. Nu se vor considera efectele reflexiei pe lama  $G$ , precum și de transmisia acesteia.

1. - a) Cum sunt dispuse imaginile  $S_1$  și  $S_2$  ale sursei  $S$  din care par a proveni fasciculele emergente ce interferează?

R: Sursa  $S$  este punctiformă deci și imaginile  $S_1$  și  $S_2$  date de sistemul format din lama  $G$  și oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  vor fi punctiforme. Când oglinzile sunt perpendiculare sistemul prezintă maximul de simetrie. Imaginea  $M'_1$  a oglinzii  $M_1$  față de lama divizoare  $G$  coincide cu oglinda  $M_2$ , iar imaginea lui  $S$  față de aceeași lamă  $G$  se obține în punctul  $H$  astfel încât,  $SI = IH = D$ . Dacă  $O_2$  reprezintă "centrul" oglinzii  $M_2$  atunci  $HO_2 = 2D$ . Față de oglinda  $M_2$  (respectiv față de imaginea  $M'_1$ ) se formează imaginea lui  $S$  (respectiv a lui  $H$ ) în punctul  $S'$  situat la

distanța  $O_2S' = 2D$ . Când oglinzile  $M'_1$  și  $M_2$  se rotesc în sens invers cu același unghi  $\alpha$ , razele  $O_2S'$  se rotesc în jurul lui  $O_2$  cu  $2\alpha = \angle OO_2S_1 = \angle OO_2S_2$ , unde  $S_1$ ,  $S_2$  și  $S'$  se află pe același cerc cu raza egală cu  $2D$ . Din fig. 54 se observă că unghiul  $\angle IHS_1 = \alpha$ .

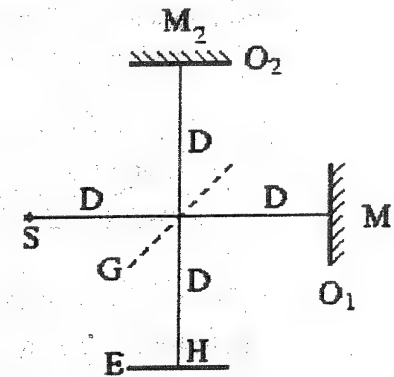


Fig. 53

1. - b) Să se calculeze în funcție de  $D$  și  $\alpha$  distanța  $S_1S_2$  și distanța  $OH$  până la ecranul  $E$  situat la distanța  $D$  față de punctul  $I$ . Se va considera  $D = 1\text{ m}$  și  $\alpha = 1^\circ$ .

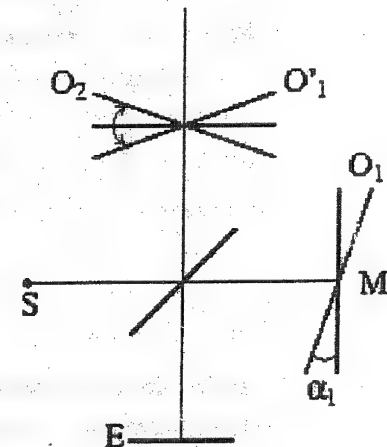


Fig. 54



R:  $S_1 S_2 = 4 D \sin 2\alpha = 0,14 \text{ mm};$

$OH = OO_2 + O_2 H = 2 D (1 + \cos 2\alpha) = 4 D \cos^2 \alpha = 4 \text{ m}$

(sau  $OH = \frac{S_1 S_2}{2 \tan \alpha} = 4 D \cos^2 \alpha$ ).

2. - Sursa S emite radiație monocromatică cu  $\lambda = 500 \text{ nm}$  și se observă franjele de interferență pe ecranul E. Să se exprime interfranja în funcție de unghiul  $\alpha$  și să se calculeze valoarea acesteia.

R: Conform relației generale, interfranja este dată de relația:

$i = \lambda \frac{OH}{S_1 S_2} = \lambda \frac{4 D \cos^2 \alpha}{4 D \sin 2\alpha} = \lambda \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \cong \frac{\lambda}{2\alpha} = 14,29 \mu\text{m}.$

3. - Intre lama G și oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  se introduc filtrele de polarizare  $P_1$  și  $P_2$  a căror grosime se presupune neglijabilă. Să se analizeze:

a) Care este fenomenul observat pe ecranul E dacă oscilațiile transmise de  $P_1$  și  $P_2$  sunt paralele sau perpendiculare.

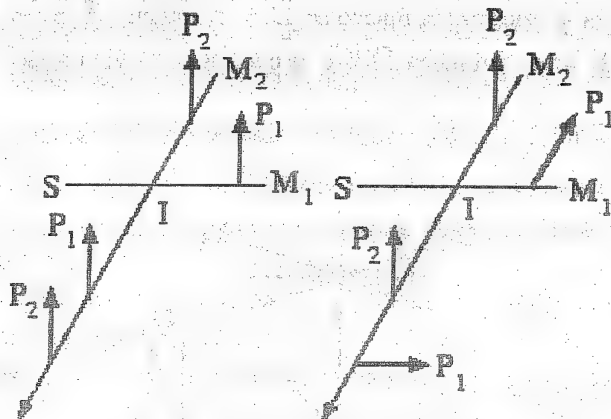


Fig. 55 a,b

R: Direcția oscilațiilor transmise de către filtrele de polarizare, atât la ducere cât și la întoarcere, este reprezentată prin săgeți. Dacă  $P_1$  este paralel cu  $P_2$  (axe de transmisie maximă ale celor două filtre de polarizare sunt paralele între ele), atunci și oscilațiile vor fi paralele (de asemenea coerente între ele) și, prin urmare, aspectul câmpului de interferență nu se va modifica (fig. 55 a). Dacă  $P_1$  este perpendicular pe

$P_2$  câmpul este iluminat uniform (fig. 55 b). În acest caz se compun oscilații reciproce perpendiculare de aceeași amplitudine. Cele două oscilații nu sunt coerente.

b) Considerăm filtrele de polarizare încrucișate ( $P_1$  este perpendicular pe  $P_2$ ), iar între S și I se introduce filtrul de polarizare P a cărui axă optică formează un unghi de  $45^\circ$  cu axele optice  $P_1$  și  $P_2$ . Care este noul aspect al câmpului de interferență?

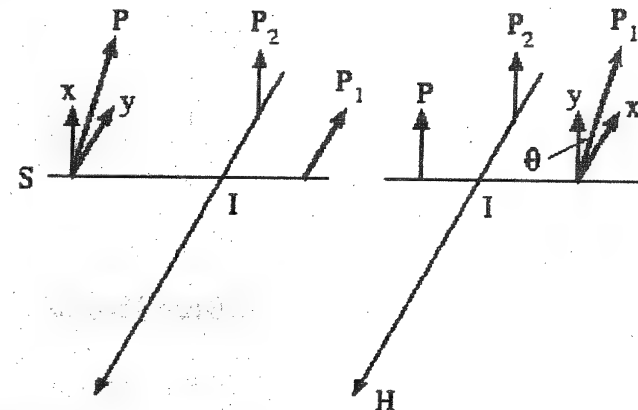


Fig. 56 a,b

R: Câmpul va fi iluminat uniform. Filtrul de polarizare P va asigura coerența oscilațiilor transmise de  $P_1$  și  $P_2$ , dar aceste oscilații vor fi perpendiculare. Pentru a reobține franjele de interferență este necesar ca între punctul I și ecranul E să se introducă un nou filtru de polarizare a cărui axă optică să nu fie paralelă cu  $P_1$  sau  $P_2$ . Acest filtru va asigura paralelismul oscilațiilor celor două fascicule ce interferează.

4. - Vibrațiile transmise de către P și  $P_2$  sunt ambele perpendiculare la planul figurii, însă cele transmise de  $P_1$  fac un unghi  $\theta$  cu precedentele. Care este repartiția iluminării pe ecranul E? Analiza se va face calculând contrastul

$\gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M}$  funcție de unghiul  $\theta$ .

R: Dacă planul fig. 57 este orizontal, atunci axa  $y$  este perpendiculară la acesta. Oscilațiile P și  $P_2$  sunt paralele între ele și paralele cu axa  $y$ . Dacă  $a$  este amplitudinea inițială a oscilației, atunci la ieșirea din filtrul  $P_1$  amplitudinea va fi  $a \cos \theta$ , amplitudine ce este reflectată din nou de oglinda  $M_1$  prin filtrul  $P_1$ . Prin urmare, de la oglinda  $M_1$  spre H vor proveni oscilațiile:

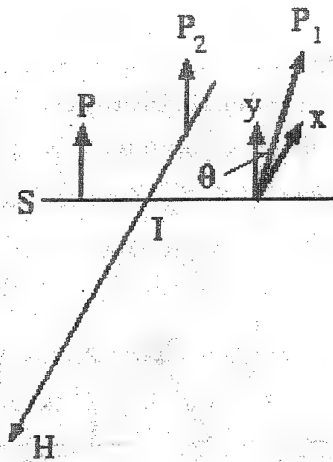


Fig. 57

$$y_1 = a \cos^2 \theta \cos \omega t \text{ și } x_1 = a \sin \theta \cos \theta \cos \omega t$$

(considerăm faza  $\varphi_1 = 0$ ).

De la oglinda  $M_2$  va veni în aceeași direcție oscilația:

$$y_2 = a \cos(\omega t - \varphi)$$

(faza  $\varphi$  va depinde de poziția punctului H pe ecranul E).

Compunerea oscilațiilor paralele și coerente  $y_1$  și  $y_2$  va da intensitatea:

$$I_y = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = a^2 \cos^4 \theta + a^2 + 2a^2 \cos^2 \theta \cos \varphi$$

iar intensitatea totală într-un punct al ecranului E va fi:

$$I = I_y + I_{x_1} = a^2(1 + \cos^2 \theta) + 2a^2 \cos^2 \theta \cos \varphi.$$

De unde pentru pozițiile punctului H pe ecranul E pentru care:

$$\varphi = 2k\pi, \text{ se obține: } I_M = a^2(1 + 3\cos^2 \theta)$$

$$\varphi = (2k+1)\pi, \text{ se obține: } I_m = a^2(1 - \cos^2 \theta),$$

$$\text{de unde: } \gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M} = \frac{4\cos^2 \theta}{1 + 3\cos^2 \theta} = \begin{cases} 1 & \theta = 0, \pi \\ 0 & \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ (fig. 58).}$$

În cazul  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , axele de transmisie maximă ale filtrelor P și  $P_1$  sunt

perpendiculare, deci unul din fasciculele ce interferează ( $P_1$ ) dispare, iar ca rezultat câmpul de interferență apare uniform iluminat deci  $\gamma = 0$ .

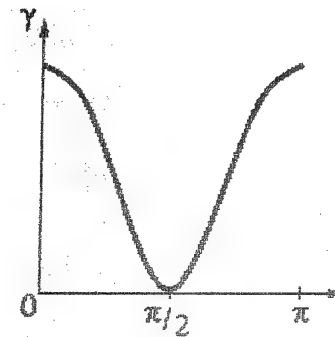


Fig. 58

5. - Se înlătură cei trei polarizi și se presupune  $\varepsilon = 0$ . Oglinda  $M_2$  se îndepărtează față de I la o distanță  $D + d$ . Să se calculeze raza inelelor de interferență obținute pe ecranul E. Considerând radiația armonică  $\lambda = 500 \text{ nm}$  și  $d = 0,1 \text{ mm}$ , să se calculeze raza primului inel luminos (Fig. 59).

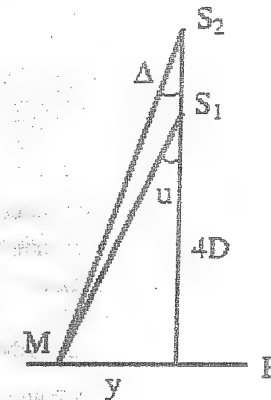


Fig. 59

R: Deoarece  $M_2$  și imaginea  $M_1'$  a oglinzii  $M_1$  sunt paralele dar distanțate cu  $d$ , imaginile punctiforme ale lui S ( $S_1$  și  $S_2$ ) se vor afla față de ecranul

E la distanța  $4D$  și  $4D + 2d$ . Într-un punct  $M$  situat pe ecranul  $E$  la distanța  $y$  față de "centru", diferența de drum optic este:

$$\Delta = S_2M - S_1M = S_2S_1 \cos u \cong 2d \left( 1 - \frac{u^2}{2} \right) = 2d \left( 1 - \frac{y^2}{32D^2} \right),$$

unde:  $u = \frac{y}{4D}$ .

Ordinul de interferență la centru ( $y = 0$ ) este:

$$k_0 = \frac{2d}{\lambda} = \frac{200}{0,5} = 400,$$

iar când  $y$  crește, ordinul de interferență scade:

$$k = k_0 \left( 1 - \frac{y^2}{32D^2} \right).$$

Se obțin inele luminoase pentru:

$$k = k_0 \left( 1 - \frac{y^2}{32D^2} \right) \frac{y^2}{32D^2} = \frac{k_0 - k}{k_0} = (k_0 - k) \frac{\lambda}{2d}, \text{ de unde:}$$

$$y = 4D \sqrt{(k_0 - k) \frac{\lambda}{d}}.$$

Pentru primul inel luminos:

$$k = 399 \text{ și } y_1 = 4D \sqrt{\frac{\lambda}{d}} = 28,2 \text{ cm}.$$

6. - Se consideră dispozitivul din problema precedentă, însă sursa emite lumină albă, iar  $d = D$ . Care este aspectul tabloului de interferență? În locul ecranului  $E$  se plasează fanta unui spectroscop cu rețea de difracție (dispersia proporțională cu lungimea de undă), în așa fel încât centrul fantei coincide cu axa sistemului (punctul  $H$ ). Considerăm axa  $Oy$  paralelă cu fanta, iar  $Ox$  perpendiculară pe fantă. Care este numărul de caneluri întinse ce apar în spectru în domeniul  $\lambda = (400 \div 800) \text{ nm}$ , dacă înălțimea fantei este egală cu  $2 \text{ cm}$ . Lățimea se consideră infinit îngustă.

R: Pentru  $y = 0$ , diferența de drum optic la "centru":  $\Delta = 2D = 2 \text{ m}$ . Diferența de drum fiind foarte mare nu se pot observa inele de interferență. Câmpul apare uniform iluminat, însă este iluminat de un "alb de ordin superior", care poate fi pus în evidență dacă radiația este analizată cu un spectroscop. În planul  $E$  fanta

spectroscopului este paralelă cu  $Oy$ , iar dispersia are loc după axa  $Ox$ . Deoarece  $d = D$ , diferența de drum este:

$$\Delta = 2D \cos u = 2D \left( 1 - \frac{u^2}{2} \right) \cong 2D - \frac{y^2}{25d}, \text{ deoarece: } u = \frac{y}{5D},$$

(se consideră o valoare medie).

Inelele negre apar pentru:  $\Delta = (2p+1) \frac{\lambda}{2}$ , iar fanta spectroscopului le vor

sectiona. Deoarece spectroscopul este cu rețea, fiecare punct negru de pe înălțimea fantei se va afla în planul focal al spectroscopului la o distanță față de axa optică egală cu:  $x = A\lambda$ . Pentru o valoare  $p$  dată, ansamblul punctelor negre de pe fantă desenează caneluri negre a căror ecuație se obține eliminând parametrul  $\lambda$ :

$$x = A\lambda = A \frac{2\Delta}{2p+1} = \frac{A}{2p+1} \left( 4D - \frac{2y^2}{25D} \right).$$

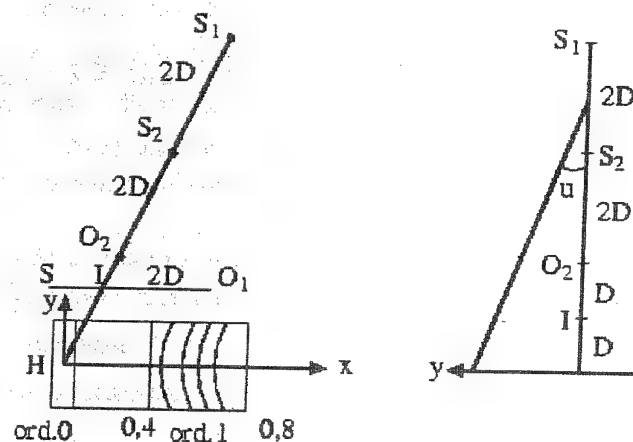


Fig. 60

(fiecărei valori  $p$  îi corespunde o parabolă, fig. 60). Pentru  $y = 0$  ordinul de interferență  $p = \frac{2D}{\lambda}$  variază între  $\frac{2000}{4 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^6$  (pentru  $\lambda = 400 \text{ nm}$ ) și  $2,5 \cdot 10^6$  (pentru  $\lambda = 800 \text{ nm}$ ). Deci vor apare un număr de aproximativ  $2,5 \cdot 10^6$  parabole. Dacă diferența de drum este mai mică, parabolele apar mai rare.

7. - Sursa emite radiație armonică  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , iar coeficientul de finețe al liniei spectrale este  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10^4$ . Care este valoarea maximă a lui  $d$  pentru care încă este posibilă observarea fenomenului în centrul figurii de interferență?

**R:** Franjele nu vor mai fie vizibile atunci când poziția maximului pentru lungimea de undă  $\lambda$  va coincide cu poziția pentru lungimea de undă  $\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$ , deci:

$$p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda} \text{ (maxim) și } p - \frac{1}{2} = \frac{\Delta}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{2d}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} \text{ (minim)}$$

( $\Delta\lambda$  reprezintă lățimea liniei spectrale) de unde:

$$\Delta p = \frac{\Delta}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{2d}{\lambda} - \frac{2d}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{2d\Delta\lambda}{\lambda(2\lambda + \Delta\lambda)} = \frac{1}{2}$$

de unde:

$$d = \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda}{\Delta\lambda} + \frac{\lambda}{4} = \left( \frac{0,5}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} + \frac{0,5}{4} \cdot 10^{-3} \right) \text{ mm} = 2,5 \text{ mm}.$$

## Interferometrul Michelson -2

Considerăm un interferometru Michelson reglat astfel încât distanțele  $IM_1$  și  $IM_2$  sunt egale, iar oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  sunt perpendiculare la  $IM_1$  și  $IM_2$ . O sursă punctiformă  $S$  dispusă în focarul obiectivului  $L_1$  emite radiația monocromatică  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Presupunem că lama  $G$  intervine numai ca divizor de fascicul, iar coeficientul ei de reflexie și transmisie pentru intensitate este egal cu 0,5.

1. - Să se arate că în acest dispozitiv două unde plane care se propagă în direcția  $IP$  sunt coerente și în fază. Dacă  $I_0$  reprezintă intensitatea emisă de sursă, să se calculeze intensitatea în cele două fascicule? Obiectivul  $L_2$  proiectează oglinda  $M_1$  în planul de observare  $P$ . Care este aspectul câmpului de interferență în acest plan?

**R:** Deoarece sursa punctiformă  $S$  se află în centrul focarului lentilei  $L_1$ , în interiorul interferometrului, până la lentila  $L_2$ , se propagă unde plane. Întrucât toate razele pleacă de la același punct luminos, peste tot vibrațiile vor fi coerente. Fiecare din cele două fascicule ce se suprapun în regiunea  $IP$  au suferit o transmisie și o reflexie pe lama  $G$  precum și o reflexie pe oglinda  $M_1$ , respectiv  $M_2$  (a căror coeficient de reflexie este considerat egal cu unitatea). În același timp drumurile optice parcurse de cele două fascicule sunt egale  $IM_1 = IM_2$  (fig. 61). Prin urmare în fiecare punct al planului  $P$  sosesc două raze a căror oscilații sunt coerente și în fază. Dacă  $I_0$



(amplitudinea  $A_0 = \sqrt{I_0}$ ) reprezintă intensitatea fascicului inițial (pe porțiunea SI), atunci intensitatea fiecărui fascicul, din cele două obținute în urma divizării fascicului inițial de către lama G, va fi egală cu:  $I_0 \text{ rt} = \frac{I_0}{4}$  (sau amplitudinea

$$A = \frac{A_0}{4} = \frac{\sqrt{I_0}}{2}.$$

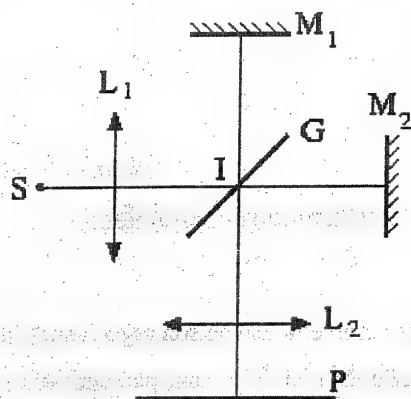


Fig. 61

Deoarece în toate punctele spațiului IP oscilațiile celor două fascicule sunt coerente și în fază, valoarea amplitudinii rezultante va fi:  $\frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{2} = A_0$  sau a

intensității:  $I = \left(\frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2}\right)^2 = I_0$ . Deci total se petrece ca și cum interferometrul

nu ar exista. Deoarece lentila  $L_2$  formează imaginea oglinzii  $M_1$  în planul P (și în același timp și cea a lui  $M_2$ ), ecranul va fi iluminat uniform, intensitatea incidentă totală fiind  $I_0$ . Prin urmare oglinzile și lama separatoare nu fac altceva decât să modifice direcția fascicului ce pleacă din S.

2. - În fața oglinzii  $M_1$  se așează o mică lamă de formă pătrată cu latura egală cu 2 mm, în așa fel încât aceasta produce numai un defazaj uniform independent de  $\lambda$ . Să se arate că, prin măsurători fotometrice, se poate determina defazajul introdus de lamă. Contrastele măsurate pentru două lame  $La_1$  și  $La_2$  fiind  $\gamma = 1$ , respectiv

$\gamma = 0,25$ , să se deducă grosimea lamei în lungimi de undă (se va considera prin definiție  $\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}}$ ).

R: Toate razele paralele care traversează lama La suferă o întârziere corespunzătoare la:  $\Delta = 2(n-1)h$ , unde  $n$  este indicele de refracție al lamei, iar  $h$  grosimea acesteia (fig. 62). Defazajul acestor raze în raport cu cele reflectate direct pe  $M_2$  este egal cu  $\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$ . Razele ce trec prin lama La ajung în P într-o regiune ce reprezintă imaginea lamei La formată de  $O_2$  și determină o iluminare uniformă a acestei regiuni corespunzătoare unei intensități  $I$ . În fiecare punct al domeniului  $a'b'$  se compun două vibrații de amplitudine  $\frac{\sqrt{I_0}}{2}$  și defazate cu  $\varphi$ . Intensitatea rezultantă va fi:

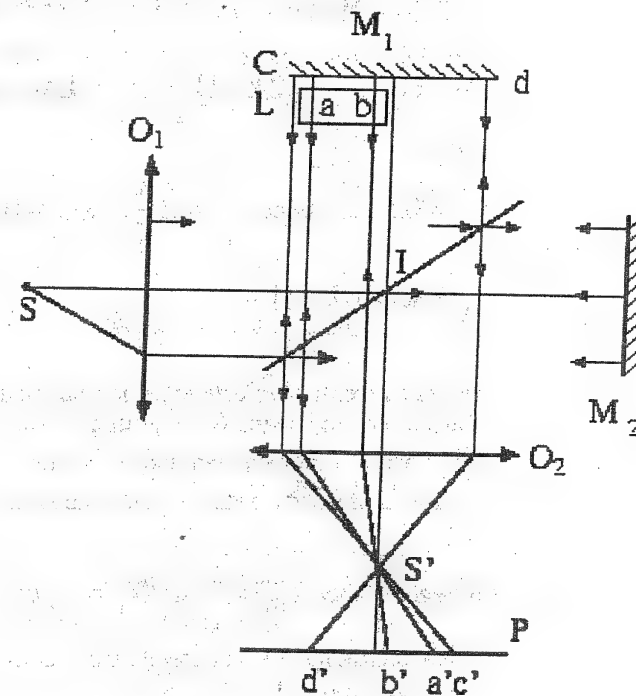


Fig. 62

$$I = A^2 = 2 \left( \frac{\sqrt{I_0}}{2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\sqrt{I_0}}{2} \right)^2 \cos \varphi = I_0 \cos^2 \varphi$$

În domeniul unde nu este interpusă lama  $La$ ,  $\varphi = 0$  deci  $I = I_0$ . Comparând fluxurile energetice pe două suprafețe egale din domeniul  $a'b'$  și  $c'd'$  se poate măsura mărimea:  $\frac{I}{I_0} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ , de unde se poate determina valoarea defazajului  $\varphi$ . Contrastul dintre cele două domenii este egal cu:

$$\gamma = \frac{I_0 - I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{I_0} = \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

și variază între limitele 0 și 1.

Pentru lama  $La_1$ :  $\gamma_1 = 1$ , deci:  $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1$  și  $\frac{\varphi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , de

unde:  $\varphi = (2k+1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_1$ , deci:  $\Delta_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$  (lama  $La_1$  reprezintă o "lamă jumătate de lungime de undă")

Pentru lama  $La_2$ :  $\gamma_2 = 0,5$ , se obține:  $\frac{\varphi}{2} = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi = (6k \pm 1)\frac{\pi}{6}$ ,

de unde:  $\Delta_2 = (6k \pm 1)\frac{\lambda}{6}$ .

3. - În unele cazuri, când este necesar să se determine defazaje foarte slabe, se preferă ca obiectul să apară strălucitor pe fond negru. Să se justifice această necesitate calculând contrastul. Oglinda  $M_1$  poate fi deplasată de-a lungul direcției  $IM_1$ . Să se calculeze valoarea minimă  $x$  a acestei translații pentru ca observarea să se facă pe "fond negru"?

R: Dacă fondul este negru atunci  $I_m = 0$  și  $I_M = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ , deci

$\gamma = 1$ , adică oricare ar fi valoarea defazajului  $\varphi$ , contrastul este maxim. Chiar dacă mărimea  $\varphi$  este foarte mică, contrastul va fi egal tot cu  $\gamma = 1$  în loc de:

$\gamma = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ , ceea ce ar avea loc dacă  $I_m > 0$ . Pentru a obține un fond întunecat

este suficient ca oglinda  $M_1$  (sau  $M_2$ ) să fie deplasată printr-o translație (apropiere sau îndepărtare). Deci  $x = \pm \frac{\lambda}{4} = \pm 0,125$ , ceea ce introduce o diferență de drum

egală cu  $\Delta = 2x = \pm \frac{\lambda}{2}$ .

4. - a) Se rotește oglinda  $M_1$  cu un unghi  $\alpha$  față de poziția inițială. Să se descrie sistemul de franje obținut (lama  $La$  este îndepărtată). Să se stabilească unde se află planul de localizare al franjelor dacă sursa nu este punctiformă. Să se calculeze interfranja  $i$  pentru  $\alpha = 2'$ .

R: În acest caz între oglinda  $M_1$  și imaginea  $M'_1$  a oglinzii  $M_2$  se formează o pană de aer de unghi  $\alpha$ . În planul  $P$  unde lentila  $L_2$  formează imaginea lui  $M_2$  se observă franje rectilinii paralele cu axa  $O$  de rotație (fig. 63). Dacă sursa nu este punctiformă franjele sunt localizate în planul penei de aer. La distanța  $y$  față de axa  $O$  pana are grosimea  $h = \alpha y$ , de unde:  $\Delta = 2h = 2\alpha y$ . De la o franjă la alta se trece atunci când  $\delta\Delta = \lambda \delta$ , deci interfranja:

$$i = \Delta y = \frac{\delta\Delta}{2\alpha} = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

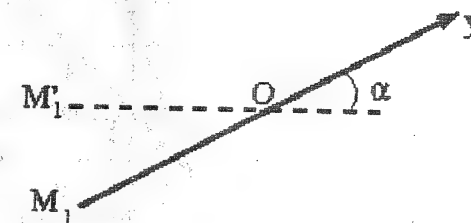


Fig. 63

Relația de mai sus este generală și dă valoarea interfranjei în cazul interferenței a două unde plane ce fac între ele un unghi  $2\alpha$ . Deci sursele de emisie se află la infinit și deasemenea fac între ele un unghi  $2\alpha$ .

$$i = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2\pi/180 \cdot 60} = 0,43 \text{ mm } (\alpha = 2' = \frac{2\pi}{180 \cdot 60}).$$

b) Se presupune că în planul P se observă 13 franje luminoase. Ce lărgime unghiulară trebuie să prezinte sursa pentru ca vizibilitatea franjelor în planul P să nu fie perturbată.

**R:** Deoarece sursa prezintă o extindere spațială, într-un punct oarecare N al penei de aer unde grosimea este egală cu  $\alpha y$  sosesc din diferite puncte ale sursei raze cu diferite înclinări. Raza care sosește în N cu o înclinare  $i$  provine dintr-un punct  $S'$ , care este văzut din centrul lentilei  $L_1$  sub același unghi  $i$ . Pentru această rază diferența de drum introdusă de pana de aer este egală cu:

$$\Delta = 2h \cos i = 2\alpha y \cos i.$$

Deoarece toate razele care pleacă din N vor ajunge în  $N'$ , punctul-imaginea lui N dată de lentila  $L_2$ ; în acest punct va avea loc suprapunerea rezultatelor tuturor fenomenelor de interferență produse separat de toate punctele luminoase ale sursei. Fiecare punct al sursei dă un fenomen de interferență particular, iar lumina emisă de acest punct este incoerentă în raport cu lumina emisă de alte puncte ale sursei (fig. 64). Să considerăm un punct N, unde S dă o franjă luminosă. Punctul  $S'$  al sursei va da, în același punct N, o franjă întunecată dacă:

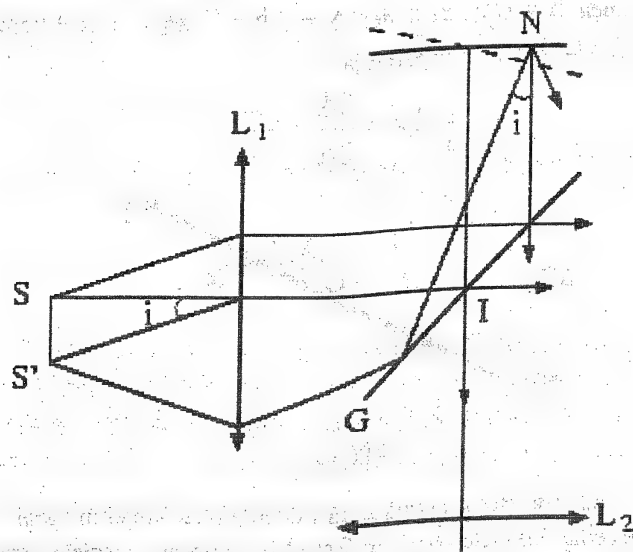


Fig. 64

$$\delta\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = 2\alpha y(1 - \cos i).$$

Unghiul  $i$  cel mai mic ce va da această discordanță va corespunde la:

$$2\alpha y(1 - \cos i) = \frac{\lambda}{2}, \text{ deci: } \cos i = 1 - \frac{\lambda}{4\alpha y}.$$

Deoarece discordanța apare la marginea câmpului, adică pentru:  $y = \frac{6\lambda}{2\alpha}$ , se obține:

$$\cos i = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}, \text{ deci: } i = 23^\circ 30'$$

(cele 13 franje luminoase sunt situate: 6 de-o parte și 6 de cealaltă parte a punctului de intersecție a imaginilor oglinzilor, iar o franjă la intersecția acestora).

Dacă se admite că franjele sunt încă vizibile când două puncte luminoase situate la marginile sursei dau un decalaj de un sfert de interfranjă, atunci:

$$2\alpha y(1 - \cos i) = \frac{\lambda}{4}, \text{ iar: } y = \frac{6\lambda}{2\alpha}, \text{ deci:}$$

$$\cos i = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}, i = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

c) Să se descrie aspectul câmpului P dacă lama La se așează la loc.

**R:** Deoarece valoarea interfranței este egală cu  $i = 0,45 \text{ mm}$ , în domeniul ocupat de lama de formă pătrată cu latura de  $2 \text{ mm}$  se formează 4 franje. La introducerea lamei cele 4 franje din acest domeniu se deplasează în bloc față de celelalte franje care rămân pe loc. Pentru acest domeniu diferența de drum este egală cu:

$$\Delta = 2\alpha y + 2(n-1)h.$$

5. - Considerăm că oglinda  $M_1$  a fost supusă unei rotații de unghi  $\alpha$  și unei translații de valoare  $x$  calculată la punctul 3. Să se descrie aspectul câmpului dacă există lama și dacă sursa emite lumină albă. Se vizează planul P cu un ocular micrometric. În lumină albă, la introducerea lamei deplasarea franjei centrale corespunde la 23 de diviziuni de pe tambur; în lumină monocromatică ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ) valoarea interfranței este egală cu 10 diviziuni. Să se deducă diferența de drum optic introdusă de lamă. De ce trebuie măsurată "deplasarea" în lumină albă?

**R:** Dacă nu ar exista lama La atunci câmpul de interferență ar avea următorul aspect. În lumină albă, o franjă aproape neagră centrală în punctul O

deoarece oglinda  $M_1$  a fost traslată cu  $x = \frac{\lambda}{4}$  ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ). Alături de această

franjă apar franje paralele: prima este irizată în violet spre franja neagră și în roșu spre exterior. Următoarele sunt mai puternic irizate ajungând la albul de ordin superior. Este necesar să se lucreze în lumină albă pentru a recunoaște franja centrală.

Atunci când se introduce lama  $La$ , franja centrală împreună cu sistemul de franje se deplasează în  $O'$  (fig. 65). În acest mod se poate determina deplasarea franjei centrale. Această deplasare corespunde la 23 diviziuni pe tambur, deci  $2,3i$  ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ).

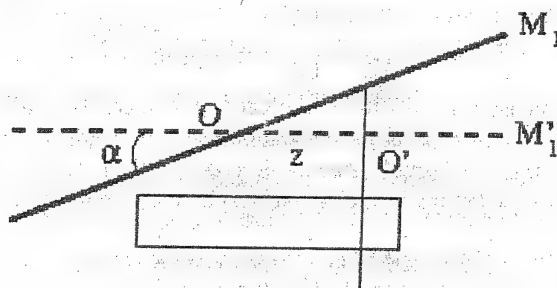


Fig. 65

De unde diferența de drum introdusă de lamă:

$$\Delta = 2,3\lambda = 2,3 \cdot 0,5 \mu\text{m} = 1,15 \mu\text{m}.$$

Oglinda  $M_1$  a fost rotită cu un unghi  $\alpha$  formându-se o pană de aer, iar în urma translării pe distanța  $x$ , franja centrală a devenit neagră. La introducerea lamei de sticlă sistemul de franje se deplasează, iar franja centrală neagră o vom regăsi în  $O'$ , la distanța  $z$ . În punctul  $O'$  este îndeplinită condiția:  $2\alpha z = 2(n-1)h = \Delta$ , adică rotația oglinzii micșorează diferența de drum cu  $2\alpha z$ , iar introducerea lamei o crește cu aceeași mărime; în punctul  $O'$  cele două efecte se compensează.

### Interferometrul Michelson - 3

Un interferometru Michelson este iluminat de o sursă luminoasă monocromatică plasată în  $S$  și se observă fenomenul de interferență în planul focal  $F$  al lentilei  $L$  plasată la ieșirea din interferometru. Oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  sunt reglate în așa fel încât imaginea  $M'_2$  a lui  $M_2$  dată de lama separatoare  $I$  este exact paralelă cu  $M_1$ .

1. - Să se descrie tabloul de interferență ce se observă în planul focal principal  $F$ .

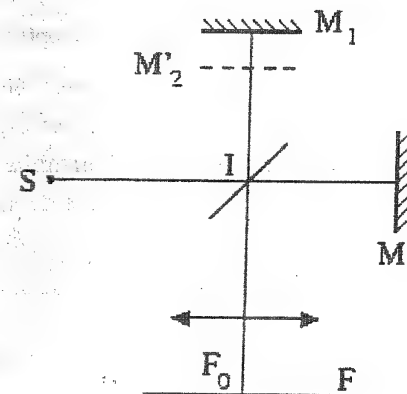


Fig. 66



R: În planul F, datorită prezenței lentilei L, se observă interferența la infinit a celor două fascicule reflectate pe suprafețele paralele  $M_1$  și  $M'_2$  care delimitează între ele o lamă de aer (fig. 66). Tabloul de interferență este format din cercuri concentrice cu centrul în punctul  $F_0$ .

2. - Ce condiție trebuie să se impună distanței de la S la I și extinderii spațiale a sursei pentru ca să se observe fenomenul de interferență.

R: Pentru a obține aceste inele de interferență este necesar ca pe lama groasă de aer să vină raze de lumină cu unghiuri de incidență diferite. Dacă se utilizează o sursă punctiformă situată la infinit (distanța SI) sau o sursă punctiformă situată în focarul unei lentile, nu se vor obține inele de interferență deoarece toate razele paralele converg în punctul  $F_0$ . Deci este necesar să se utilizeze o sursă punctiformă situată la o distanță finită sau, mai bine, o sursă extinsă spațial situată fie la o distanță finită, fie în focarul unei lentile.

3. - Se așează între I și  $M_1$  un polarizor  $P_1$  care transmite vibrațiile verticale, iar între I și  $M_2$  un polarizor  $P_2$  care transmite vibrațiile orizontale. Ce modificări apar în figura de interferență?

R: Cele două vibrații verticale și orizontale ce ajung în planul F nu pot interfera deoarece ele sunt incoerente (la fel ca în cazul experienței lui Fresnel și Arago).

4. - Păstrând filtrele de polarizare  $P_1$  și  $P_2$ , ce trebuie să se mai adauge la montaj pentru a obține în planul F un fenomen identic cu cel ce se obține în lipsa filtrelor de polarizare?

R: Pentru a obține un fenomen identic este necesar să se introducă între S și I un polarizor P a cărui axă optică să nu coincidă cu axele optice ale polarizorilor  $P_1$  și  $P_2$  (aceasta va transmite lumină a cărei oscilații se va face într-un singur plan, deci va restabili coerența). De asemenea între I și L este necesar să se introducă un analizor A (a cărui axă optică să nu coincidă cu axa polarizorilor  $P_1$  și  $P_2$ ) care face posibilă obținerea a două oscilații paralele. Pentru ca figura de interferență să prezinte maximum de contrast este necesar ca axele optice ale lui P și A să facă un unghi de  $45^\circ$  cu axele optice ale lui  $P_1$  și  $P_2$  (amplitudinile celor două oscilații care interferă vor fi egale și  $I_{\min} = A_1 - A_2 = 0$ ).

5. - Să se analizeze cum variază în absența polarizorilor intensitatea luminoasă în planul focal  $F_0$  al lentilei L funcție de distanța h dintre  $P_1$  și  $P_2$ , (se presupune că reflexiile precum și traversarea lamei separatoare I nu introduce întârziere optică).

R: În punctul  $F_0$ , situat pe axa optică a dispozitivului, ajung razele ce sunt reflectate normal de  $M_1$  și  $M_2$ . Dacă h reprezintă grosimea lamei de aer echivalentă sistemului format din cele două oglinzi și din lama separatoare, atunci:  $\Delta = 2h$ , de unde:  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2h$ , iar variația intensității:  $I = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ .

6. - Se introduce între S și I un polarizor P, o lamă anizotropă  $Q_1$  între I și  $M_1$  și o lamă anizotropă  $Q_2$  între I și  $M_2$ . Lamele  $Q_1$  și  $Q_2$  sunt identice și fiecare introduce o întârziere optică de  $\frac{\lambda}{8}$  între cele două vibrații rectilini, perpendiculare, care se propagă fără deformare. Axele optice ale acestor lame fac un unghi de  $45^\circ$  cu direcția vibrației transmise de polarizorul P; pe de altă parte axele optice între ele sunt perpendiculare, adică axa lamei  $Q_1$ , care corespunde valorii cele mai mari a indicelui de refracție este paralelă cu axa pentru care indicele de refracție al imaginii  $Q'_2$  a lamei  $Q_2$  față de lama separatoare I are valoarea cea mai mică. Să se analizeze cum variază intensitatea și starea de polarizare a luminii în  $F_0$  atunci când h variază. Se va analiza în particular starea de polarizare pentru  $h = 0$ .

R: După filtrul de polarizare P câmpul de radiație este liniar polarizat; acesta este incident atât pe lama anizotropă  $Q_1$  cât și pe lama  $Q_2$ . Axa optică a lamei  $Q_1$  face un unghi de  $45^\circ$  cu axa optică a lui P, deci la trecerea prin  $Q_1$  radiația se descompune în două oscilații reciproc perpendiculare, de amplitudine egală și diferență de fază egală cu  $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$ . Când lama este traversată a doua oară de radiația

reflectată pe oglindă se mai introduce o diferență de fază de  $\frac{\pi}{4}$ , în total obținându-se

$\frac{\pi}{2}$ , deci radiație polarizată circular. Lama  $Q_2$  de asemenea formează lumină polarizată circular, însă datorită așezării asimetrice a axei optice față de  $Q_1$ , circulația este în sens invers.

Lama de aer introduce între cele două oscilații polarizate circular în sens invers o diferență de drum de  $\Delta = 2h$ , careia îi corespunde o diferență de fază egală cu  $\varphi = \frac{4\pi h}{\lambda}$ , de unde variația intensității în punctul  $F_0$ , atunci când variază grosimea lamei de aer este dată de:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = I_0 \cos^2 \frac{4\pi h}{2\lambda}$$

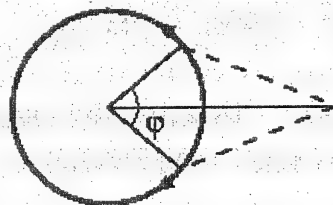


Fig. 67

Dacă  $\Delta = 0$  se obține  $I = I_0$ , adică se obține oscilația inițială dată de polarizorul P (ca și cum lamele anizotrope nu ar interveni) (fig. 67).

7. - Cu ce mediu optic poate fi comparat ansamblul format de interferometrul Michelson și cele două lame  $Q_1$  și  $Q_2$ ? Să se precizeze cantitativ, funcție de grosimea lamei de aer  $h$ .

R: Ansamblul format de interferometru și lamele anizotrope  $Q_1$  și  $Q_2$  poate fi comparat cu un cristal de cuarț de lungime  $d$ , tăiat perpendicular pe axa optică și așezat în așa fel încât axa lui optică este paralelă cu direcția SI. În acest caz planul de polarizare al radiației polarizate liniar dată de polarizorul P va fi rotit de către cristallul de cuarț cu un unghi  $\alpha$  (fenomenul de rotire naturală a planului de polarizare):

$$\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda} = \pi(n_s - n_d)d,$$

de unde:

$$d = \frac{n_s - n_d}{\lambda} h$$

8. - Să se indice ce se întâmplă dacă (menținând mărimea  $h$  fixă) se așează între lama separatoare și cele două oglinzi, două lame identice prezentând:

a) rotirea naturală a planului de polarizare;

b) rotirea magnetică a planului de polarizare

R: a) Dacă lama prezintă proprietatea de rotire naturală a planului de polarizare, la trecerea a doua oară prin lamă a luminii reflectate are loc compensarea primei rotiri. Ca rezultat nu se observă nici o schimbare în tabloul de interferență.

b) Rotirea magnetică depinde de sensul curentului în bobina de excitare și nu de sensul de propagare a radiației. La a doua trecere unghiurile de rotire se adună ceea ce conduce la un unghi de rotire egal cu  $2\alpha$ .

### Interferometrul Rayleigh

Schema unui interferometru Rayleigh destinat măsurării indicilor de refracție la gaze este prezentat în fig. 68. Un colimator C este urmat de două cuve identice; obiectivul lunetei L reglată pentru infinit are un capac în care sunt perforate două fante  $F_1$  și  $F_2$ , paralele cu fanta de intrare F a colimatorului. Distanța dintre centrele celor două fante, care sunt dispuse pe axele cuvelor, este egală cu 3 cm. Dispozitivul este iluminat cu radiația monocromatică a mercurului  $\lambda = 546 \text{ nm}$ .

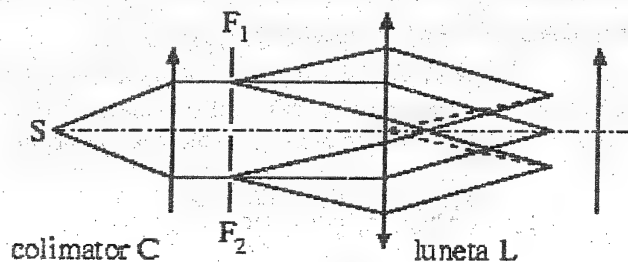


Fig. 68

1.- Să se explice cauza apariției tabloului de interferență. Care este distanța dintre două franje succesive? Care trebuie să fie grosimentul lunetei pentru ca să se observe două franje vecine, știind că ochiul poate observa două obiecte dacă acestea sunt separate de o distanță unghiulară de  $0,1^\circ$ ?

R: a) Fasciculul paralel de radiație este difractat de fantele  $F_1$  și  $F_2$ . Razele paralele între ele ce aparțin la cele două fascicule difractate interferă la infinit, deci franjele de interferență pot fi observate cu ajutorul lunetei reglate la infinit.

b) Calculul interfranței (fig. 69). Diferența de drum între razele ce interferă:  $\Delta = a \sin \theta \cong a \theta$ . În planul focal al lentilei se poate scrie:

$$x = F \theta = F \frac{\Delta}{a}$$

Distanța unghiulară între cele două franje este:  $\Delta \theta = \frac{\lambda}{a}$ , iar mărimea

interfranței în planul focal este:  $i = \frac{F}{a} \lambda$ .

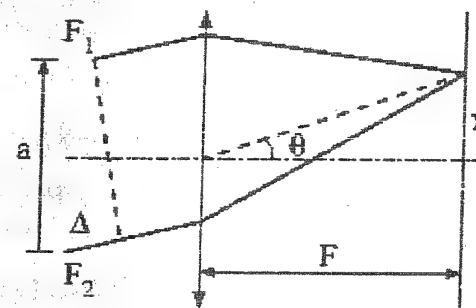


Fig. 69

c) Calculul grosimentului:  $G \Delta \theta = G \frac{\lambda}{a} \geq 0,1^\circ = \frac{\pi}{180 \cdot 10}$ ,

deci:

$$G \geq \frac{a}{\lambda} \frac{\pi}{1800}$$

2. - Cuvele pentru gaze au o lungime  $l = 1 \text{ m}$ ; ele sunt închise la ambele capete cu lame de sticlă de aceeași grosime, însă care poate fi neglijată. La început acestea conțin aer la presiune normală. Apoi presiunea dintr-un tub se micșorează și se constată că prin fața reticulului trec 10 franje. Să se calculeze variația presiunii. Care este variația admisibilă a temperaturii într-un tub în raport cu celălalt dacă observarea frajelor se face cu o precizie de  $1/10$  dintr-o franjă?

Se consideră că indicele de refracție al aerului este egal cu 1,000292 la

presiune normală, aerul se supune legii  $\frac{n-1}{d} = \text{ct}$  și este considerat un gaz perfect.

Indicele de refracție al  $\text{CO}_2$  la presiune normală este 1,000448; care este numărul de franje care se deplasează în fața reticulului când se înlocuiește aerul dintr-un tub cu aer viciat ce conține 1%  $\text{CO}_2$  la aceeași presiune și aceeași temperatură? Se admite că în amestecul gazos "puterea de refracție"  $(n-1)$  se adună conform relației de aditivitate.

R: a) Dacă în fața fantelor  $F_1$  și  $F_2$  se introduc cele două cuve, atunci drumul optic în interiorul lor este  $n l$ , depășind drumul optic corespunzător când acestea sunt vidate cu  $(n-1)l$ . În centrul câmpului, în locul  $x = 0$  este îndeplinită condiția  $\Delta = 0$ . La micșorarea presiunii într-o cuvă, variația drumului optic este egală cu:

$$\delta\Delta = 10\lambda = l\Delta n.$$

Legea gazelor perfecte pentru un gram de gaz:  $pV = RT$ , iar din legea lui

Gladstone  $\frac{n-1}{d} = \text{ct}$  se obține:

$$\frac{n-1}{\frac{1}{V}} = (n-1)V = (n-1)\frac{RT}{p}, \text{ sau: } \frac{dn}{n-1} = \frac{dp}{p}, \text{ de unde:}$$

$$\Delta p = \frac{p}{n-1} \Delta n = \frac{p}{n-1} \frac{10\lambda}{l} = 1,87 \cdot 10^{-2} \text{ atm} = 14,212 \text{ torr}.$$

b) Dacă temperatura variază și presiunea este constantă atunci din relația  $(n-1)T = \text{ct}$ , se obține:

$$\frac{dn}{n-1} + \frac{dT}{T} = 0 \text{ sau: } -l\Delta n = l(n-1)\frac{\Delta T}{T} = \frac{\lambda}{10},$$

$$\text{deci: } \Delta T = T \frac{1}{10(n-1)} \frac{\lambda}{l}, \text{ de unde: } \Delta T = 1,87 \cdot 10^{-4} \text{ K}.$$

Dacă:  $T = 300 \text{ K}$ , atunci:  $\Delta T = 5,61 \cdot 10^{-2} \text{ K}$ .

c) În cazul amestecurilor de gaze se poate scrie:

$$(n-1)_{\text{amestec}} = 0,99(n-1)_{\text{aer}} + 0,01(n-1)_{\text{CO}_2} = \\ = (n-1)_{\text{aer}} + 0,01(n-1)_{\text{CO}_2} - 0,01(n-1)_{\text{aer}} =$$

$$(n-1) = (n-1)_{\text{amestec}} - (n-1)_{\text{aer}} = \frac{1}{100}(n-1)_{\text{CO}_2} = \\ = (n-1)_{\text{aer}} = \frac{n_{\text{CO}_2} - n_{\text{aer}}}{100} = 1,56 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{Deci: } \delta\Delta = [\delta(n-1)]l = 1,56 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 \mu\text{m} = 1,56 \mu\text{m}.$$

Numărul de franje ce se deplasează este egal cu:

$$m = \frac{\delta\Delta}{\lambda} = \frac{1,56}{0,546} = 2,857 \text{ (deci se poate determina conținutul de 1\% CO}_2 \text{ din aerul viciat).}$$

3. - Măsurători de genul descris mai sus se fac în lumină albă, plasând în drumul celor două fascicule două lame de sticlă ale unui compensator Jamin. Când cele două tuburi conțin același gaz cele două fascicule traversează cele două lame sub același unghi de incidență de  $i = 6^\circ$ ; lamele au aceeași grosime  $h$  și același indice de refracție  $n = \frac{3}{2}$ , a cărui valoare este considerată constantă. Ce diferență de drum optic introduce compensatorul când el se rotește cu un unghi mic? În experiența în care se variază presiunea aerului, pentru a readuce sistemul de franje la poziția inițială, este necesar să se rotească compensatorul cu un unghi de  $6^\circ$ . Care este grosimea  $h$  a lamelor?

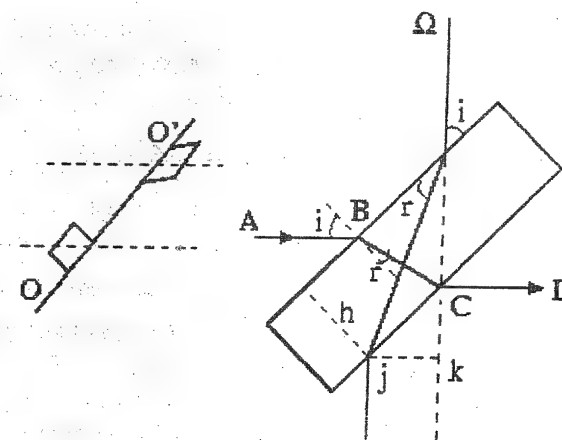


Fig. 70

R: Un compensator Jamin este compus din două lame de sticlă de aceeași grosime ce sunt așezate corespunzător în drumul celor două fascicule. Lamele sunt



așezate înclinat față de fascicul, având posibilitatea de a se roti în jurul axei  $OO'$ , unghiul de rotire putând fi măsurat (fig. 70).

a) Să calculăm întârzierea introdusă de lamă la traversare ei de către fasciculul de lumină incident sub unghiul  $i$ . Direcția fasciculului ce traversează lama este  $ABCD$ . Frontul de undă la trecerea prin lamă este reprezentat de planul  $\Omega$  (perpendicular pe direcția de propagare a fasciculului de lumină).

Deci diferența de drum optic este:

$$\Delta = JK = IJ \sin(i - r) = h \frac{\sin(i - r)}{\cos r} = h(\cos r - \cos i).$$

b) Deoarece ambele lame se rotesc simultan, atunci când pentru un fascicul unghiul  $i$  crește cu  $di$ , pentru celălalt scade cu aceeași cantitate  $di$ . Variația de drum optic între cele două fascicule va fi:

$$\delta\Delta = 2h(-n \sin r dr + \sin i di) = 2h \frac{\sin(i - r)}{\cos r} di,$$

deoarece din relația:  $\sin i = n \sin r$  se obține:

$$\cos i di = n \cos r dr.$$

c) Variind unghiul de incidență cu  $\Delta i = 6^\circ$  se poate compensa o variație a drumului optic  $\delta\Delta = 10\lambda$ . Dacă variația  $\Delta i = 6^\circ = \frac{\pi}{30}$  este considerată drept o valoare mică, atunci:

$$\sin(i - r) \cong i - r = i \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{i}{3} \text{ și } \cos r \cong 1.$$

Deci: 
$$\Delta = 10\lambda = 2h \frac{\pi}{3 \cdot 30} \frac{\pi}{30}, \text{ de unde: } h = 746,8 \mu\text{m}.$$

### Interferența fasciculelor difractate.

Intr-un ecran transparent sunt perforate două fante  $A$  și  $B$  de aceeași lărgime și paralele între ele. Fantele au aceeași înălțime, însă se presupune că înălțimea nu intervine în calcule. Ecranul este iluminat de o undă plană, monocromatică  $\lambda$ , ce provine de la sursa  $S$ , iar frontul de undă este paralel cu planul. Considerăm lărgimea fantei neglijabilă față de lungimea de undă ( $\lambda$ ) și cu atât mai mult, față de distanța dintre fante.

1. - Să se determine poziția franjelor de interferență în planul focal al unei lentile  $L$ , a cărei distanță focală este  $F$ . Notăm cu  $C$  mijlocul distanței  $AB$ . Axa optică a lentilei coincide cu axa  $SCO$ . Se notează  $AB = 2a$  și se presupune că distanța focală  $F$  este mult mai mare decât distanța  $a$ . Considerăm:  $2a = 4 \text{ cm}$ ,  $F = 2 \text{ m}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Care este cel mai bun procedeu pentru a observa franjele de interferență? Să se calculeze repartitia intensității luminoase în planul focal al lentilei, funcție de diferența de fază  $\varphi$  ce există între undele ce provin de la fantele  $A$  și  $B$ . Să se determine diferența de fază  $\varphi_1$  corespunzătoare punctului cel mai apropiat de  $O$ , unde intensitatea este egală cu intensitatea în maxim diminuată cu 4% (fig. 71).

**R:** Deoarece lărgimea fantelor  $A$  și  $B$  este foarte mică, deschiderea unghiulară a primului maxim de difracție este foarte mare. Ca urmare, în vecinătatea punctului  $O$ , amplitudinea vibrației difractate de către fiecare fantă variază foarte puțin față de amplitudinea inițială  $A_0$ . Diferența de drum optic între cele două raze paralele din cele două fascicule difractate este:  $\Delta = 2a \sin \varepsilon \cong 2a \varepsilon$ , iar maximele de intensitate corespund la:

$$\Delta = k\lambda, \text{ de unde: } \varepsilon = \frac{k\lambda}{2a}$$

În planul focal al lentilei:  $x = F\varepsilon = k \frac{\lambda F}{2a}$ , deci interfranja:

$$i = \frac{\lambda F}{2a} = 0,5 \frac{200}{4} = 25 \mu\text{m}.$$

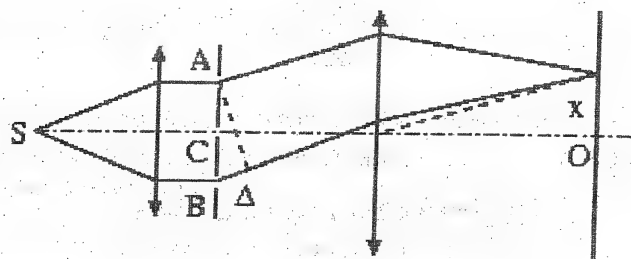


Fig. 71

Deoarece distanța  $2a$  dintre fante este mare, franjele de interferență sunt foarte fine: 40 franje pe mm. Franja centrală este luminoasă. Pentru observarea franjelor trebuie să se utilizeze o lupă Fresnel sau micrometrul ocular al unei lunete a cărei obiectiv este prima lentilă.

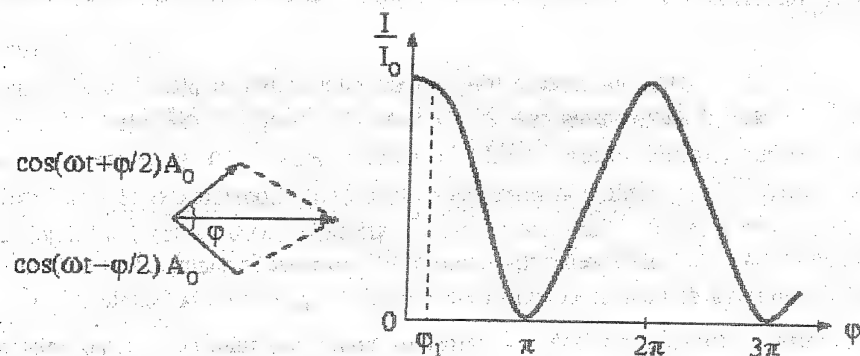


Fig. 72 a,b

Să considerăm  $A_0$  amplitudinea vibrației difractate de fiecare fantă în vecinătatea difracției normale. Compunerea celor două vibrații de amplitudine egală

( $A_0$ ), a căror defazaj este egal cu  $\varphi$ , ne dă o vibrație de intensitate:

$$I = 4 A_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \text{ deoarece: } I_0 = A_0^2, \text{ se obține:}$$

$$\frac{I}{I_0} = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 4 \cos^2 \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \frac{2\pi a x}{F} = 4 \cos^2 \frac{\pi x}{i}.$$

Repartiția intensității luminoase este prezentată în fig. 72 b.

Dacă intensitatea corespunzătoare defazajului  $\varphi = 0$  se consideră  $I = I'_0 = 4I_0$  ( $I'_0$  - intensitatea franjei din punctul O), atunci se poate scrie:

$$\cos^2 \frac{\varphi_1}{2} = 0,96, \text{ sau: } \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = 0,04, \sin \frac{\varphi_1}{2} = 0,2 \text{ de unde: } \frac{\varphi_1}{2} \cong 0,2,$$

$$\text{deci: } \varphi_1 = 0,4 \text{ rad} = \frac{180 \cdot 0,4}{3,14} = 23^\circ, \text{ sau: } \frac{\varphi_1}{2} \cong 0,2 = \frac{\pi x_1}{i}, \text{ de unde:}$$

$$x_1 = \frac{0,2i}{\pi} = 1,6 \mu\text{m}, \text{ reprezintă distanța față de punctul O unde intensitatea franjei este egală cu: } I = 0,96I'_0.$$

2. - Fără a schimba nimic din dispozitivul precedent, se introduce o a treia fantă. Acesta este paralelă cu fantele A și B și trece prin punctul C. Lărgimea acestei fante este aleasă astfel încât în vecinătatea punctului O, amplitudinea radiației ce provine din C este de  $\rho$  ori amplitudinea radiației ce provine de la fantele A și B; lărgimea acestei fante este de asemenea mică în raport cu lungimea de undă  $\lambda$  sau cu mărimea  $a$ . Fanta C are aceeași lungime ca și fantele A și B și se presupune că această lungime nu intervine explicit în calcule. Să se analizeze fenomenele de interferență produse de cele trei fante în vecinătatea punctului O. Care sunt pozițiile maximelor și minimelor de intensitate. Ce valoare trebuie să aibă  $\rho$ , pentru a obține franje cu intensitate egală cu zero.

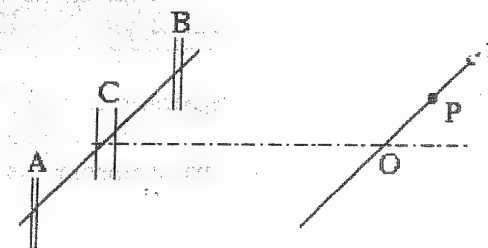


Fig. 73

**R:** Dacă amplitudinile ce provin de la fantele A și B sunt egale cu  $A_0$ , atunci amplitudinea ce provine de la fanta C este egală cu  $\rho A_0$ . Considerând că în punctul P(x) ( $x=0$ ) (fig. 73) unda ce provine de la fanta B are asupra undei ce provine de la fanta A un avans de fază egal cu  $\varphi$ , atunci asupra undei ce provine din

C are un avans de fază egal cu  $\frac{\varphi}{2}$ , iar unda din C are asupra undei din A tot un avans de  $\frac{\varphi}{2}$ . Considerând drept origine a fazelor, faza undei ce provine din C, atunci diagrama Fresnel capătă aspectul din fig. 74. Amplitudinea vibrației rezultante este egală cu:  $A_0 \left( \rho + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right)$ , iar intensitatea:  $I = I_0^2 \left( \rho + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2$ .

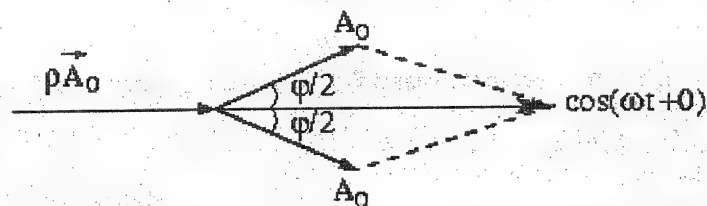


Fig. 74

Pe baza acestei relații, pentru diferite valori ale mărimii  $\rho$  și pentru diferite poziții P(x) (diferite valori  $\varphi$ ), se poate urmări variația intensității în planul focal:

	$\varphi = 0$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$
$\rho = 0$	4	0	4	0	4 (cazul de la pct. 1)
1	9	1	1	1	9
2	16	4	0	4	16
5/2	33/4	25/4	1/4	25/4	33/4

Ca valoarea intensității să fie nulă este necesar ca  $0 \leq \rho \leq 2\pi$ , de unde rezulta:  $\cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{\rho}{2}$ , relație ce determină poziția corespunzătoare P(x) din planul focal. De ex.:

$$\rho = 1, \cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2}, \varphi = 2\left(\pi \pm \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = 2, \varphi = 2\pi$$

Reprezentarea grafică a variației intensității are aspectul din fig. 75. Se observă că figura de interferență capătă o altă periodicitate. Odată cu creșterea mărimii  $\rho$  (pentru  $0 < \rho < 2\pi$ ) intensitatea franjei corespunzătoare la  $\varphi = (k+1)2\pi$  scade, ajungând egală cu zero pentru  $\rho = 2$ . În același timp, după cum s-a stabilit mai sus, minimile de la  $\pi$  și  $3\pi$  se deplasează spre  $\varphi = 2\pi$  și ajung să se contopescă cu această poziție pentru  $\rho = 2$ . Deci, în acest caz, numărul de interfranje se micșorează, interfranja devenind egală cu  $i' = 2i = 50 \mu\text{m}$ . Dacă  $\rho > 2$  și crește în continuare atunci valoarea intensității minime corespunzătoare lui  $\varphi = (k+1)2\pi$ , nu mai este egală cu zero. Pentru valori mari ale lui  $\rho$  (deci pentru deschideri mari ale fantei C) această valoare începe să fie comparabilă cu cea a intensității maxime, iar figura de interferență dispăre.

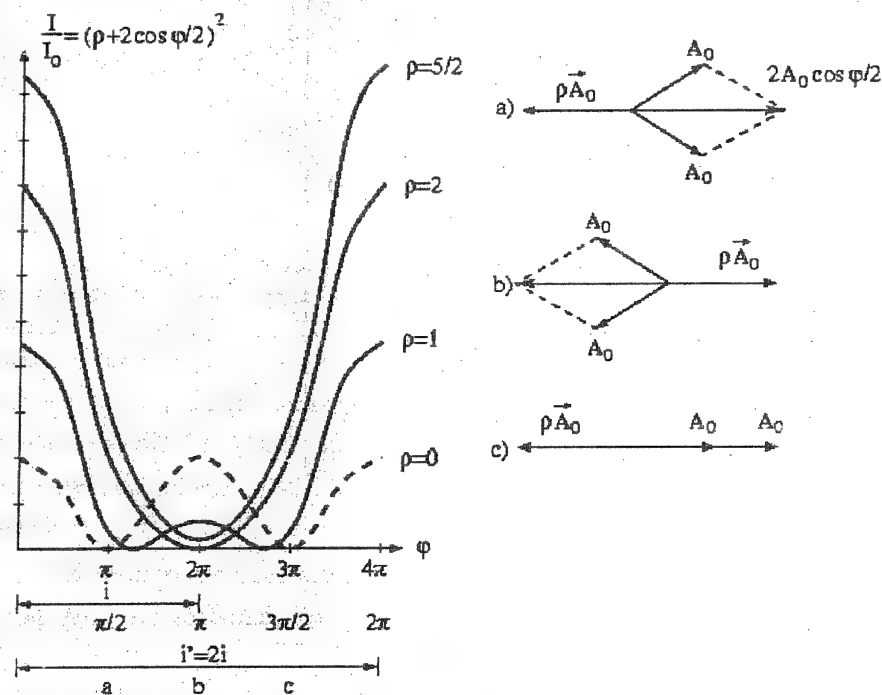


Fig. 75

3. - Fără a modifica fantele A, B și C, pe fanta C se așează o lamă sfert de undă, perfect transparentă. Această lamă o acoperă complet, însă nu acoperă fantele A și B. Lama acționează numai asupra drumului optic parcurs de raza luminoasă. Ce modificări apar în figura de interferență observată în vecinătatea punctului C.

R: Dacă se consideră că elongația vibrației radiției transmise de fanta C într-un punct  $P(x)$  în lipsa lamei sfert de undă este egală cu  $\rho A_0 \cos(\omega t + 0)$  atunci elongația vibrației transmise de B este egală cu  $A_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$ , cea transmisă de

A este  $A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$ , iar cea transmisă de fanta C prin lama sfert de undă

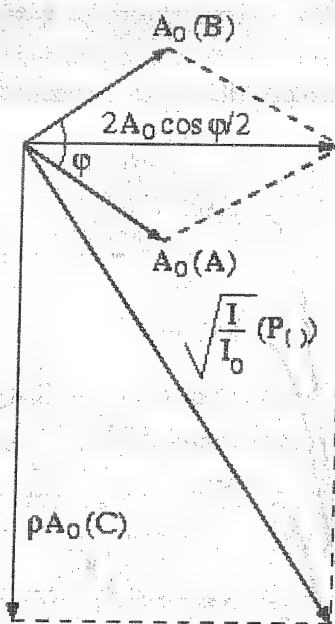


Fig. 76

este egală cu  $\rho A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ , deoarece se introduce o întârziere

$\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi \lambda}{\lambda 4} = \frac{\pi}{2}$ . Compunerea acestor elongații în punctul  $P(x)$ , conform

diagramei lui Fresnel, conduce la rezultatul prezentat în fig. 76:

$$\frac{I}{I_0} = \rho^2 + 4 \cos^2 \varphi.$$

Acesta este rezultatul de la primul punct al problemei suplimentat cu mărimea  $\rho^2$ . Distribuția intensității este asemănătoare cu cea de la primul punct, însă minimele nu mai sunt egale, iar maximele sunt mai luminoase. Franjele nu suferă nici o deplasare, iar mărimea interfranței este aceeași și anume  $i = 25 \mu m$  (fig. 77).

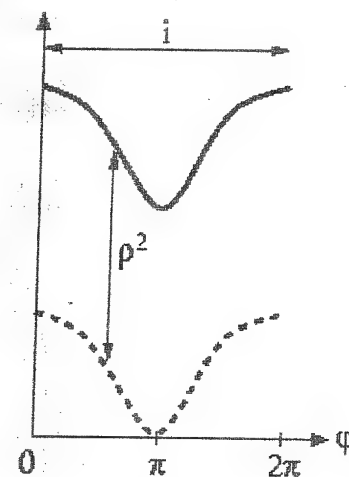


Fig. 77

4. - Pe fanta C se așează o lamă perfect transparentă, care nu este riguros o lamă sfert de undă. Diferența de fază introdusă de această lamă diferă de cea introdusă de o lamă sfert de undă cu cantitatea  $\varepsilon$ . Să se calculeze variația intensității funcție de valoarea  $\varepsilon$ . Ce valoare trebuie să i se dea lui  $\rho$  pentru ca variația intensității între două maxime succesive, comparată cu intensitatea aceluiași maxime pentru  $\varepsilon = 0$ , să fie cât mai mare posibil? Cu această valoare a lui  $\rho$  să se calculeze valoarea lui  $\varepsilon_1$  ce corespunde unei variații relative de intensitate de 4% între două maxime. Să se compare  $\varepsilon_1$  cu valoarea  $\varphi_1$  determinată la punctul 1.

R: În acest caz elongațiile ce ajung în punctul  $P(x)$  vor avea valorile:



$$(A) \quad A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$(B) \quad A_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$(C) \quad \rho A_0 \cos\left[\omega t - \left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right)\right]$$

Diagrama lui Fresnel are aspectul din fig. 78.

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \rho^2 + 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 4\rho \cos \frac{\varphi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \cong \\ \text{Deci:} \quad &\cong \rho^2 + 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 4\rho\varepsilon \cos \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

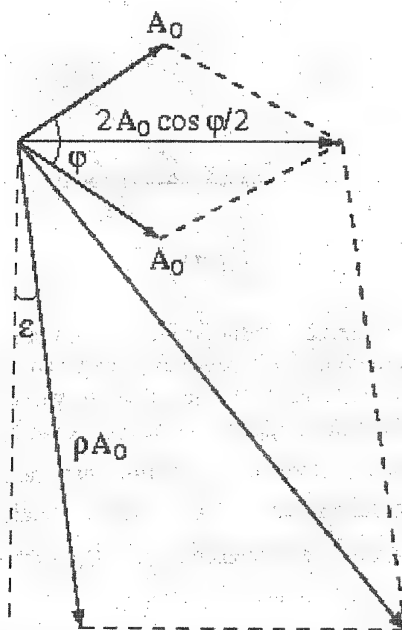


Fig. 78

Dacă:  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ , se obține:

$$\varphi = 0, \quad I_{MM} = \frac{I}{I_0} = \rho^2 + 4 + 4\rho\varepsilon;$$

$$\varphi = \pi, \quad I_m = \rho^2;$$

$$\varphi = 2\pi, \quad I_{Mm} = \frac{I}{I_0} = \rho^2 + 4 - 4\rho\varepsilon;$$

Dacă:  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$  se permută  $I_{MM}$  cu  $I_{Mm}$ . Distribuția intensității în planul focal al lentilei are aspectul din fig. 79. Diferența de intensitate între două maxime succesive este egală cu:

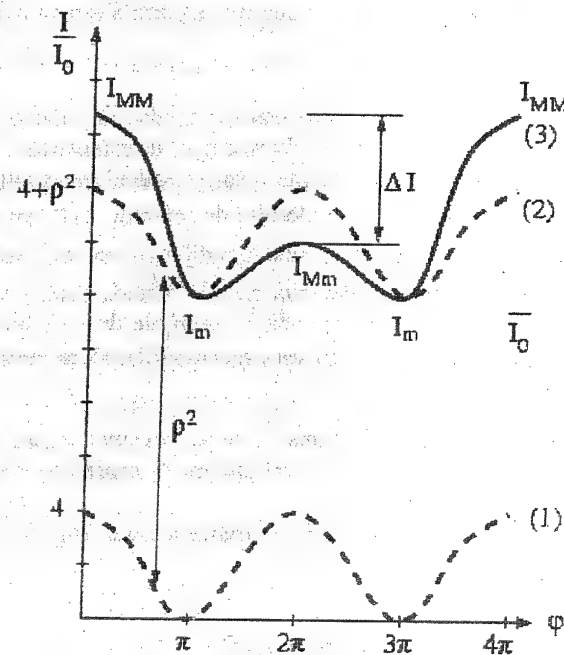


Fig. 79

$$\Delta I = I_{MM} - I_{Mm} = 8\rho\varepsilon.$$

În cazul  $\varepsilon = 0$  s-a obținut:  $I_M = \rho^2 + 4$ .

Funcția:  $y = \frac{I_{MM} - I_{mm}}{I_M} = \frac{8\varepsilon\rho}{\rho^2 + 4} = \frac{8\varepsilon}{\rho + \frac{4}{\rho}}$ , prezintă o valoare maximă

pentru:  $\rho = \frac{4}{\rho} = 2$ , deci:  $y_M = 2\varepsilon$ .

Atunci când variația relativă a intensității între două maxime este egală cu 4% se obține:  $y_M = 2\varepsilon_1 = 0,04$ , deci:  $\varepsilon_1 = 0,02$ .

În cazul primei probleme pentru aceeași variație de intensitate s-a determinat diferența de fază  $\varphi_1 \cong 0,4 = 20\varepsilon_1$ . Deci variația intensității în câmpul de interferență este mult mai sensibilă la variația mărimii  $\varepsilon$ , deci a grosimii lamei din fața fantei C.

5. - Valorile obținute în problema de mai sus conduc în principiu la o metodă nouă care ar permite, pe bază de măsurători fotometrice, determinarea diferențelor de fază cu o foarte mare precizie. Ca exemplu să se calculeze pentru o radiație monocromatică ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ), variația indicelui de refracție  $\Delta n$  pe o lungime de 1 cm a unui tub umplut cu gaz care corespunde la o diferență de fază egală cu  $\varepsilon_1$ . Să se indice ce precauții experimentale ar necesita această metodă pentru ca o asemenea determinare de indice de refracție să corespundă la condițiile de stare bine definite ale unui gaz. Se consideră că mărimea  $(n-1)$  variază proporțional cu densitatea gazului ( $n = 1,0003$ ) (fig. 80).

R: În fasciculul ce provine de la fanta C se așează cuva cu gaz de lungime  $l$ , iar indicele de refracție al gazului este  $n$ . La variația lui  $n$  apare o variație a drumului optic egală cu:  $\delta\Delta = l\Delta n$ , corespunzător o variație a fazei  $\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l\Delta n$ . Din condiția:  $\delta\varphi = \varepsilon_1$ , se obține:

$$\Delta n = \frac{\varepsilon_1 \lambda}{2\pi l} = \frac{0,02 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^3} = 1,59 \cdot 10^{-9},$$

deci o precizie foarte mare a determinării indicelui de refracție.

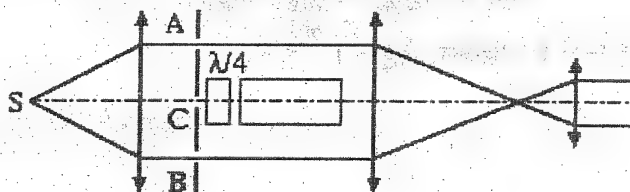


Fig. 80

Din punct de vedere al realizării experimentale apar o serie de dificultăți: franjele sunt foarte dese ( $i = 25 \mu\text{m}$ ) deoarece mărimea  $2a = 4 \text{ cm}$  este mare. Această mărime nu poate fi micșorată deoarece trebuie așezată cuva cu gaz. La o asemenea precizie mediul din cuvă trebuie să fie foarte omogen, adică să prezinte același indice de refracție pe toată lungimea cuvei. Asupra omogenității gazului din cuvă influențează atât presiunea cât și temperatura. Din legea lui Gladstone  $\frac{n-1}{d} = \text{ct}$ , pentru o masă de 1 g de gaz ( $\frac{p}{d} = RT$ ) se obține:  $\frac{n-1}{RT} p = \text{ct}$ .

Dacă temperatura este constantă, iar presiunea variază, atunci:

$$\frac{dn}{n-1} + \frac{dp}{p} = 0, \text{ de unde: } \Delta p = \frac{p}{n-1} \Delta n \cong \frac{1,6 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-4}} p.$$

Deci este necesară o presiune uniformă și constantă până la precizia de:  $\Delta p < 5 \cdot 10^{-6} p = 5 \text{ bari}$ .

Dacă presiunea este constantă și temperatura variază:  $\frac{dn}{n-1} - \frac{dT}{T} = 0$ , de

$$\text{unde: } \Delta T = \frac{\Delta n}{n-1} T \cong \frac{1,6 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-4}} T.$$

$$\Delta T < 5 \cdot 10^{-6} T = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ grade, pentru: } T = 300 \text{ K.}$$

Aceste condiții experimentale sunt greu de realizat, deci metoda este prea sensibilă.

### Etalonul Fabry-Perot. Etalonul dublu.

1. - Un etalon Fabry-Perot este format din două plăci de sticlă (sau de cuarț), slefuite optic, *semiargintate*, care limitează între ele o pană de aer de grosime  $h$ . Valoarea coeficienților de reflexie, transmisie și absorbție a fiecărei din cele două oglinzi care limitează lama de aer, este egală respectiv cu  $R, T, A$ . Pe o lamă a acestui sistem este incident sub unghiul de incidență  $i$  un fascicul de radiație optică de lungime de undă  $\lambda$ . Să se arate că intensitatea fascicului transmis de sistem este dată de relația:

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \text{ unde: } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos i.$$

R: Din fig. 81 rezultă că între razele corespunzătoare mărimilor  $I_1$  și  $I_2$  apare diferența de drum optic:

$$\Delta = n_a(AB+BC) - n_g AD,$$

unde:  $n_a$  - indicele de refracție al mediului dintre plăci (aer, deci  $n_a \cong 1$ ),  $n_g$  - indicele de refracție al materialului din care sunt confecționate plăcile.

Din considerente geometrice:

$$\Delta = \frac{2h}{\cos i} - 2hn_g \tan i \sin r = 2h \left( \frac{1}{\cos i} - \frac{\sin i}{\sin r} \tan i \sin r \right) = 2h \cos i.$$

Diferența de fază dintre aceleași raze este egală cu:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos i \cong \frac{2\pi}{\lambda} 2h \left( 1 - \frac{i^2}{2} \right).$$

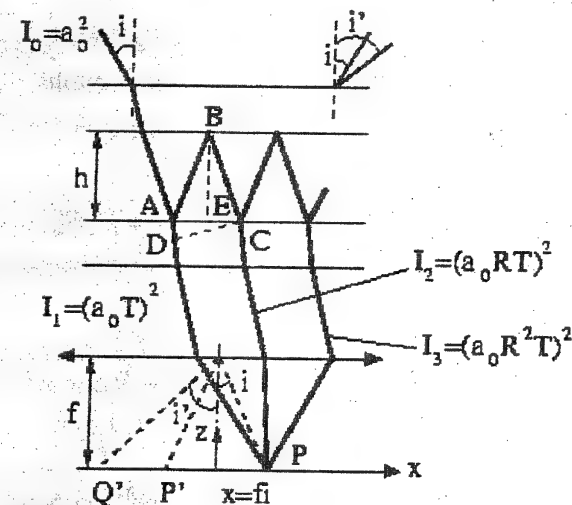


Fig. 81

Dacă  $I_0$  reprezintă intensitatea razei incidente, atunci:

$$I_1 = T^2 I_0, I_2 = T^2 R^2 I_0, I_3 = T^2 R^4 I_0, I_4 = T^2 R^6 I_0, \dots$$

iar dacă amplitudinea oscilației câmpului corespunzătoare lui  $I_1$  o notăm cu  $a_1 = T a_0$ , amplitudinile razelor rezultate în urma reflexiilor multiple vor fi:  $a, Ra, R^2 a, R^3 a, \dots$ , iar diferențele de fază ale aceluiași raze introduse de drumurile optice parcurse în plus sunt:

$$0, \varphi, 2\varphi, 3\varphi, \dots$$

Fasciculul de raze paralele  $I_1, I_2, I_3, \dots$  este focalizat de lentila convergentă  $L$  în punctul  $P$  ( $x = fi$ ) al planului ei focal. În punctul  $P'$  va converge fasciculul de raze paralele ce provine de la raza incidentă pe interferometru sub același unghi, însă în partea dreaptă a figurii. În punctele  $Q$  și  $Q'$  vor converge fascicule ce provin de la razele incidente sub unghiul  $i'$ . Figura de interferență obținută în planul focal al lentilei  $L$  va fi formată din cercuri concentrice (radiație monocromatică), cu centrul pe axul optic al sistemului (franje localizate la infinit). Elongția undei rezultante în punctul  $P$  este:

$$y = a \cos(\omega t - 0) + a R \cos(\omega t - \varphi) + a R^2 \cos(\omega t - 2\varphi) + \dots + a R^n \cos^n(\omega t - \varphi)$$

sau folosind numere complexe:

$$y = \left[ a e^{i\omega t} (1 + R e^{-i\varphi} + R^2 e^{-i2\varphi} + \dots + R^n e^{-in\varphi}) \right], \text{ unde: } R < 1$$

(în această relație  $n$  - numărul de reflexii tinde la infinit și ca rezultat intensitatea razei

$I_n$  tinde la zero). Suma acestei progresii geometrice de rație  $q = R e^{-i\varphi}$  este:

$$S \cong a e^{i\omega t} \frac{1}{1-q} = a e^{i\omega t} \frac{1}{1-R e^{-i\varphi}} = a e^{i\omega t} \frac{1}{(1-R \cos \varphi) - iR \sin \varphi}$$

Pentru a obține intensitatea radiației transmise se înmulțește expresia de mai sus cu conjugata ei:

$$I = \left[ a e^{i\omega t} \frac{1}{(1-R \cos \varphi) + iR \sin \varphi} \right] \left[ a e^{-i\omega t} \frac{1}{(1-R \cos \varphi) - iR \sin \varphi} \right] = a^2 \frac{1}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = a_0^2 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

(amplitudinea  $a$  este o mărime reală).

2. - Considerându-se  $I_M$  valoarea maximă a intensității inelelor de interferență,  $I_m$  intensitatea minimă (fondul pe care se detasează inelele), să se calculeze transmisia sistemului optic  $\tau = \frac{I_M}{I_0}$  și contrastul figurii de interferență

$$C = \frac{I_M}{I_m}$$

R: Din analiza relației:  $I = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$  rezultă că valoarea maximă a mărimii  $I$  (inel luminos) se obține atunci când:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{2\lambda} 2h \cos i = k\pi, \text{ adică: } \Delta = k\lambda, \text{ de unde:}$$

$$I_M = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2}$$

Valoarea minimă se obține pentru:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{2\lambda} 2h \cos i = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ adică: } \Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \text{ de unde:}$$

$$I_m = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R} = I_0 \frac{T^2}{(1+R)^2}$$

( $I_m \neq 0$  deoarece, ținând cont că  $\varphi = (2k+1)\pi$ , se poate scrie:

$$A_m = (a - aR) + (aR - aR^3) + (aR^4 - aR^5) + \dots, \text{ iar } R < 1.$$

$$\text{Prin urmare: } \tau = \frac{I_M}{I_0} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \text{ și } C = \frac{I_M}{I_m} = \frac{(1+R)^2}{(1-R)^2}$$

Dacă:  $R = 0,81$  se obține:  $\tau = 1$  și  $C = 90,25$ .

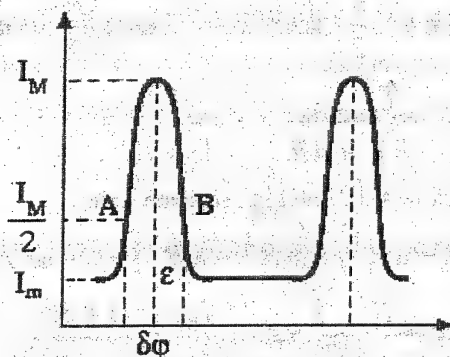
3. - Lărgimea relativă a unui inel se definește ca raportul dintre lățimea inelului (corespunzătoare valorii  $\frac{I_M}{2}$ ) și distanța dintre două inele vecine. Să se determine coeficientul de finețe, definit ca inversul lărgimii relative, și să se arate că puterea de rezoluție este proporțională cu coeficientul de finețe și ordinul de interferență.  
R: În fig. 82 este prezentată variația intensității luminoase în planul focal al lentilei în domeniul inelelor  $p-k$ ,  $p-k-1$ .

Din relația:  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos i$  se observă că pentru  $\lambda = \text{ct}$ , dacă unghiul de incidență ( $i$ ) crește, atunci diferența de drum optic, respectiv diferența de fază ( $\varphi$ ) scade. Diferența de fază între două inele vecine este:  $\Delta\varphi_{MM} = 2\pi$ . Semilățimea unghiulară a inelului măsurată între punctele A și B este:  $\delta\varphi = 2\varepsilon$ , unde  $\varepsilon$  reprezintă distanța unghiulară pentru care intensitatea  $I_M$  scade la jumătate.

$$\text{Deoarece: } I_M = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2}, \text{ se poate scrie:}$$



$$I = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = I_M \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$



p	p-k	p-k-1	nr. inelelor
0	i_k	i_{k-1}	unghi incidență (i)
φ_p	φ_{p-k}	φ_{p-k-1}	dif. fază(φ)
0	2kπ	2(k-1)π	
2h	2h-Δ_k	2h-Δ_{k-1}	dif. drum (Δ)

Fig. 82

Deci dacă:  $\frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = 1$ , atunci:  $I_\varepsilon = \frac{I_M}{2}$ . Valoarea unghiului  $\varepsilon$  fiind

mică se obține:  $\varepsilon = \frac{1-R}{R}$ , sau:  $\delta\varphi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$ , iar lărgimea relativă este dată de

$$\text{relația: } F = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)}$$

$$\text{Ex: } R = 0,81, \delta\varphi = 2\varepsilon = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} = 0,42 \text{ rad} = 25^\circ \text{ (variația fazei)}$$

la trecerea din punctul A în B), iar  $F \approx 15$ .

**Puterea de rezoluție.** Considerăm o radiație cu lungimea de undă  $\lambda + \delta\lambda$ , incidentă pe interferometru sub același unghi de incidență  $i$  ca și radiația  $\lambda$ , în așa fel încât datorită variației  $\delta\lambda$  inelul de interferență  $k_{\lambda+\delta\lambda}$  să fie deplasat față de inelul

$k_\lambda$  cu diferența  $\delta\varphi_{AB}$  (fig. 83). Dacă  $\delta\varphi < \delta\varphi_{AB}$  atunci inelele se confundă, iar dacă  $\delta\varphi > \delta\varphi_{AB}$  între inele apare deja un inel clar întunecat. Distanța  $\delta\varphi_{AB}$  corespunde limitei de rezoluție.

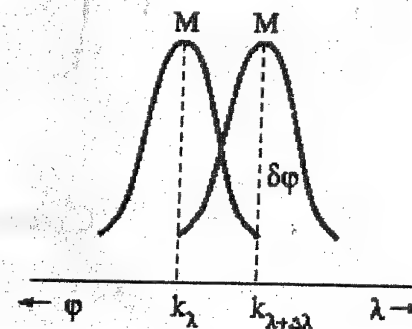


Fig. 83

Din relația:  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos i$ , dacă  $i = \text{ct}$ , iar lungimea de undă

variază se obține:  $\delta\varphi = -\frac{2\pi\delta\lambda}{\lambda^2} 2h \cos i$ , sau:  $\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi}\right)_{i=\text{ct}} = -\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ .

$$\text{Puterea de rezoluție: } R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\varphi}{\delta\varphi} = \frac{2k\pi}{\delta\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi} k = kF$$

$$\text{Ex: } h = 1, \lambda = 500 \text{ nm}, k \approx \frac{2h}{\lambda} = \frac{20000}{0,5} = 40000$$

$$R = kF = 40000 \cdot 15 = 600000$$

4. - În vecinătatea spectrală a radiației intense cu  $\lambda = 600 \text{ nm}$  trebuie să se observe un satelit de intensitate mică  $i_0 = 0,003 I_0$ . Grosimea etalonului a fost aleasă astfel încât cele două sisteme de inele de interferență sunt practic în discordanță. Să se calculeze contrastul  $C$  și factorul de reflexie  $R$  necesar observării satelitului, știind că acesta este observabil dacă intensitatea inelelor sale este egală cu cel puțin  $1/5$  din intensitatea fondului.

**R:** Anterior s-a stabilit că:

$$I_m = I_0 \frac{T^2}{(1+R)^2}, \text{ iar } i_M = i_0 \frac{T^2}{(1-R)^2}$$

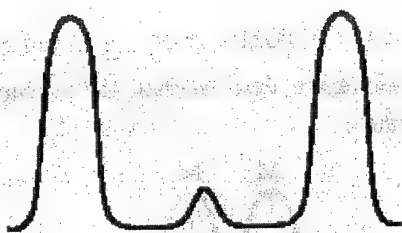


Fig. 84

Deci:

$$\frac{I_M}{I_m} = \frac{1}{5} = \frac{i_0}{I_0} \left( \frac{1+R}{1-R} \right)^2 = 3 \cdot 10^{-3} C, \text{ de unde:}$$

$$C = 66,66 \text{ și } R = 0,782.$$

5. - Să se calculeze intensitățile  $I_M$  și  $I_m$  transmise de etalonul din sticlă cu indicele de refracție  $n$  ale cărui oglinzi ( $M_1$  și  $M_2$ ) prezintă coeficienți de reflexie diferiți. Coeficientul de reflexie al stratului  $M_1$  este  $R = r^2$ , cel al stratului  $M_2$  este  $R_1 = r_1^2$ . Se neglijează absorția în straturile reflectante și în sticlă. Să se arate că acest etalon se comportă ca o pătură a cărei coeficient de reflexie, pentru  $\varphi = 2k\pi$ , este egal cu:  $R' = r'^2 = \left( \frac{r_2 - r}{1 - rr_2} \right)^2$ . Care ar fi coeficientul de reflexie al acestui strat fictiv pentru  $\varphi = (2k+1)\pi$  (fig. 84 a).

**R:** Deci: -  $T^2$  se înlocuiește cu  $TT_1 = (1 - r^2)(1 - r_1^2)$

-  $R^2$  se înlocuiește cu  $RR_1$ , adică:  $R = \sqrt{RR_1} = rr_1$ .

Diferența de fază devine:  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2nh \cos r$  (a se demonstra). În aceste condiții distribuția intensității în planul focal al lentilei este dată de relația:

$$I = I_0 \frac{(1 - r^2)(1 - r_1^2)}{(1 - rr_1)^2 + 4rr_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Dacă  $\Delta = k\lambda$ , adică  $\varphi = 2k\pi$ , se obține:

$$I_M = I_0 \frac{(1 - r^2)(1 - r_1^2)}{(1 - rr_1)^2},$$

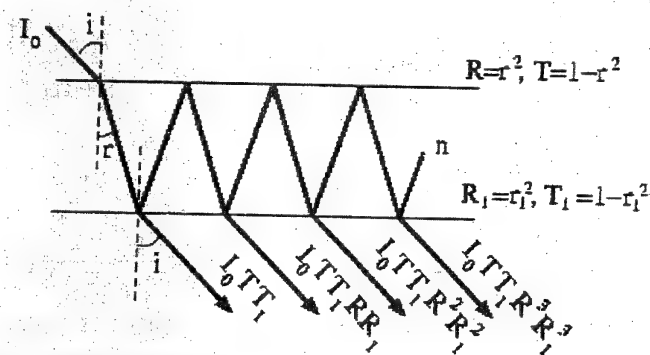


Fig. 84 a

iar pentru  $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ , adică  $\varphi = (2k+1)\pi$  se obține:

$$I_m = I_0 \frac{(1 - r^2)(1 - r_1^2)}{(1 + rr_1)^2}.$$

Pentru o situație intermediară, de ex.  $\varphi = (4k \pm 1)\frac{\pi}{2}$  se obține:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \left( k\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ deci:}$$

$$I = I_0 \frac{(1 - r^2)(1 - r_1^2)}{(1 - rr_1)^2 + 4rr_1 \frac{1}{2}} = I_0 \frac{(1 - r^2)(1 - r_1^2)}{1 + r^2 r_1^2}.$$

*Stratul reflectant echivalent.*

Pentru  $\varphi = 2k\pi$  se obține un factor de transmisie:

$$T'_M = \frac{I_M}{I_0} = \frac{(1 - r^2)(1 - r_1^2)}{(1 - rr_1)^2},$$

căruia îi corespunde un coeficient de reflexie:

$$R'_M = 1 - T'_M = \frac{I_M}{I_0} = \left( \frac{r_1 - r}{1 - rr_1} \right)^2 = r'_M{}^2.$$

Pentru  $\varphi = (2k+1)\pi$  se obține:

$$T'_m = \frac{(1-r^2)(1-r_1^2)}{(1+rr_1)^2}, \text{ respectiv: } R'_m = 1 - T'_m = \left( \frac{r_1 + r}{1 + rr_1} \right)^2 = r'_m{}^2.$$

Pentru  $\varphi = (4k \pm 1)\frac{\pi}{2}$ , se obține:

$$T' = \frac{(1-r^2)(1-r_1^2)}{1+r^2r_1^2}, \text{ respectiv: } R' = \frac{r_1^2 + r^2}{1+r^2r_1^2}.$$

6. - Etalonul dublu. Se realizează un etalon dublu, un etalon format din lama de sticlă  $M_1M_2$ , celălalt din lama de aer  $M_2M_3$ . Ambele etaloane au aceeași grosime optică și sunt iluminate sub incidență normală. Coeficientul de reflexie al straturilor  $M_1$  și  $M_3$  este  $R = r^2$ , iar cel al stratului  $M_2$  este  $R_1 = r_1^2$ . Se neglijează absorbția în cele trei straturi. Să se calculeze factorul de reflexie  $R''$  al etalonului dublu pentru  $\varphi = 2k\pi$ . Să se stabilească relația dintre  $r$  și  $r_1$  pentru care s-ar obține transparența maximă la trecerea radiației optice prin etalon.

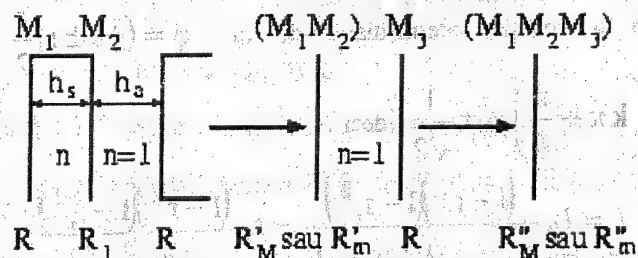


Fig. 85

R: La fel ca în cazul precedent în care cele două straturi  $M_1$  și  $M_2$  s-au înlocuit printr-unul singur  $(M_1M_2)$  cu coeficient de reflexie  $R'$ , tot așa stratul fictiv  $(M_1M_2)$  și  $M_3$  poate fi înlocuit prin stratul fictiv  $(M_1M_2M_3)$  caracterizat prin coeficientul de reflexie  $R''$  (fig. 85).

Grosimile celor două etaloane sunt  $nh_s = h_a$ . Pentru incidență aproape normală ( $r \cong i$ ), pentru ambele etaloane, este îndeplinită simultan condiția  $\varphi = 2k\pi$ , sau:

$$\delta = k\lambda = 2nh_s \cos r \cong 2h_a \cos i.$$

Dacă  $r_1 > r$ , pentru  $\varphi = 2k\pi$ , se obține:

$$R''_M = \left( \frac{r - r'_M}{1 - rr'_M} \right)^2 = \left[ \frac{r - \frac{r_1 - r}{1 - rr_1}}{1 - r \frac{r_1 - r}{1 - rr_1}} \right]^2 = \left( \frac{2r - r^2r_1 - r_1}{1 - 2rr_1 + r^2} \right)^2.$$

Dacă se consideră  $r_1 = 1 > r$  se obține  $R''_M = 1$ , ceea ce era de așteptat, deoarece oglinda  $M_2$  reflectă tot fluxul de radiație incident pe strat.

$$\text{Dacă } r_1 < r \text{ atunci: } R''_M = \left[ \frac{r - \frac{r - r_1}{1 - rr_1}}{1 - r \frac{r - r_1}{1 - rr_1}} \right]^2 = r_1^2.$$

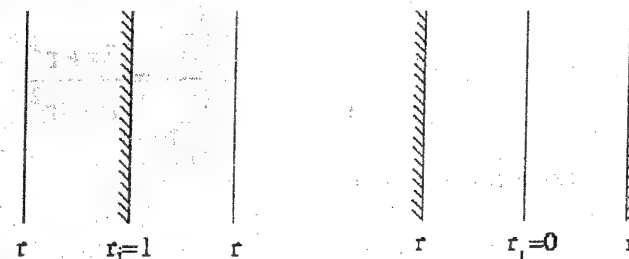


Fig. 86

Fig. 87

Dacă presupunem  $r_1 = 0 < r$ ,  $M_2$  nu mai joacă nici un rol, problema

reducându-se la un singur etalon. În acest caz se obține:  $I_M = I_0 \frac{T^2}{1 - R^2} = I_0$  ( $T = 1 - R$ ), deoarece lipsesc pierderile de energie prin absorbție.

*Problema transparenței maxime.* Transparența maximă se obține atunci când valoarea mărimii  $R''_M$  este minimă. Când  $r_1 < r$  s-a obținut  $\sqrt{R''_M} = r_1$  a cărui minim corespunde valorii  $r_1 = 0$ . Prin urmare se obține  $R''_M = 0$ , adică  $T''_M = 1$ .

Cazul  $r_1 > r$  conduce la valoarea  $R_M'' = 0$  când este îndeplinită condiția:

$$2r - r^2 r_1 - r_1 = 0, \text{ de unde: } r_1 = \frac{2r}{1+r^2}, \text{ deci:}$$

$$1) r_1 = \frac{2r}{1+r^2} > r$$

Pentru această valoare se obține  $I_M = I_0$  pentru inelele luminoase ( $\varphi = 2k\pi$ ).

Dacă nu este realizată condiția de transparență maximă, atunci  $I_M < I_0$  datorită pierderilor de energie prin reflexii succesive.

7. - Să se evalueze intensitățile  $I_M$  și  $I_m$  transmise de către etalonul dublu. Să se calculeze contrastul pentru o valoare a coeficientului de reflexie al straturilor extreme egală cu  $R_2 = 0,81$ .

**R:** Să considerăm cazul  $r_1 = \frac{2r}{1+r^2} > r$  (fig. 88). Pentru acest caz, când  $\varphi = 2k\pi$  am stabilit că  $R_M'' = 0$ , adică  $T_M'' = 1$ , ceea ce conduce la  $I_M = I_0$ . Să calculăm valoarea  $I_m$  ( $\varphi = (2k+1)\pi$ ) pentru același caz. Pentru

$$\text{primul etalon se obține: } r'_m = \frac{r_1 + r}{1 + r r_1} = \frac{r + \frac{2r}{1+r^2}}{1 + r \frac{2r}{1+r^2}} = \frac{3r + r^3}{1 + 3r^2}, \text{ iar pentru}$$

etalonul dublu, coeficientul de reflexie va fi:

$$R_m'' = \left( \frac{r + r'_m}{1 + r} \right)^2 = \left[ \frac{r + \frac{3r + r^3}{1 + 3r^2}}{1 + r \frac{3r + r^3}{1 + 3r^2}} \right]^2 = \left( \frac{4r + 4r^3}{1 + 6r^2 + r^4} \right)^2$$

$$\text{Prin urmare: } T_m'' = 1 - R_m'' = \frac{(1 - r^2)^4}{(1 + 6r^2 + r^4)^2}. \text{ Însă: } T_m'' = \frac{I_m}{I_0}, \text{ deci:}$$

$$I_m = I_0 \frac{(1 - r^2)^4}{(1 + 6r^2 + r^4)^2}$$

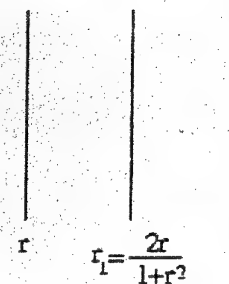


Fig. 88

$$\text{De unde contrastul: } C = \frac{I_M}{I_m} = \frac{(1 + 6R + R^2)^2}{(1 - R)^2}, \text{ deoarece } R = r^2.$$

Pentru  $R = 0,81$  se obține  $C = 32581$  (un factor de contrast foarte mare).



### Interferometrul Fabry-Perot. Filtru interferețial.

Se consideră interferometrul din problema precedentă (fig. 81). Grosimea lamei de aer este egală cu  $h$ . Se notează cu  $i$  unghiul de incidență, iar  $a_0$  reprezintă amplitudinea vibrației luminoase incidente. Coeficienții de reflexie și de transmisie a celor două straturi reflectante sunt identici și egali cu  $R$ , respectiv  $T$ . Se neglijează variațiile de fază la reflexia pe stratul *semiargintat*. Lungimea de undă a radiației incidente, calculată în aer, este egală cu  $\lambda$ . Considerând diferențele de fază  $\varphi$ ,  $2\varphi$ ,  $3\varphi$ , se compun amplitudinile diverselor raze emergente paralele ce provin din radiația incidentă sub unghi  $i$  și care converg în același punct al planului focal al obiectivului unei lunete de observare. În urma calculului, în problema precedentă s-a obținut:

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Deoarece  $I = a^2$  și  $I_0 = a_0^2$  se obține funcția:

$$I(\varphi) = \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

care reprezintă "funcția de aparat".

1. - Să se reprezinte grafic "funcția aparatului" ( $R = 0,75$ ,  $T = 0,15$ ).

R: a) Se observă că valoarea maximă  $I(\varphi) = I_M$  a funcției  $I(\varphi)$  se obține pentru  $\sin \frac{\varphi}{2} = 0$ , adică  $\varphi = 2k\pi$ , respectiv  $\Delta = k\lambda$ . Acest fapt ( $\varphi = 2k\pi$ ,  $\Delta = k\lambda$ ) ne arată că razele  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , ..., sosesc în concordanță de fază în punctul corespunzător unghiului de incidență  $i$  din planul focal (fig. 81). Pentru acest caz:  $I(\varphi) = I_M = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2$ . Dacă se notează:  $m = \frac{4R}{(1-R)^2}$ , atunci se

obține:

$$I(\varphi) = \frac{I_M}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

b) Maximele de intensitate sunt foarte înguste. Aspectul lor este determinat de parametrul  $m$ .

Dacă  $R = 0,75$  și  $T = 0,15$  atunci  $m = 48$  și  $I_M = 0,36$ , iar

$$I(\varphi) = \frac{0,36}{1 + 48 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{0,36}{D}$$

Să construim graficul funcției  $I(\varphi)$  (fig. 89):

$\varphi$	0	60	90	120	180
$\varphi/2$	0	30	45	60	90
$\sin^2 \varphi/2$	0	1/4	1/2	3/4	1
$D$	1	13	25	37	49
$I$	0,36	0,028	0,014	0,0096	0,007
$I_M$	1	0,08	0,04	0,07	0,019

Semilățimea conturului maximum de interferență ( $I = \frac{I_M}{2}$ ) se obține

pentru:  $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{48}$ , de unde:  $\varphi = 16^\circ 30'$  (variația fazei pentru punctele corespunzătoare semilățimii).

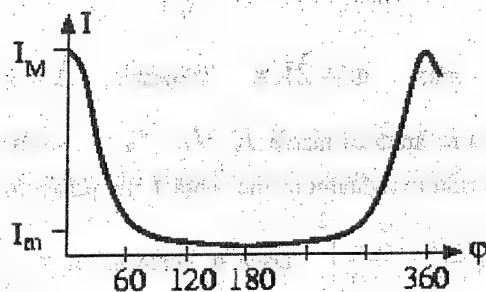


Fig. 89

2. - Pentru observarea figurii de interferență se folosește dispozitivul prezentat în fig. 90, unde S este o sursă monocromatică de dimensiuni mici, L - lunetă de observare reglată pentru infinit și care are un micrometru ocular, iar MN reprezintă interferometrul Fabry-Perot.



Fig. 90

a) Notând cu  $i_k, i_{k+1}, i_{k+2}$  unghiurile de incidență exprimate în radiani care determină inelele luminoase cele mai centrale (incidență aproape normală) corespunzătoare ordinelor de interferență  $k, k+1, k+2$ , să se calculeze valorile  $i_k^2, i_{k+1}^2, i_{k+2}^2$ .

R: Inelele luminoase se obțin dacă este îndeplinită condiția:

$$\Delta = 2h \cos i_k = 2h \sqrt{1 - \sin^2 i_k} \cong 2h \left(1 - \frac{i_k^2}{2}\right) = k\lambda$$

(incidență aproape normală).

Pentru incidență normală se obține:  $2h = p\lambda$ .

$$\text{Deci: } i_k^2 = 2 - \frac{k\lambda}{h} = 2 \left(1 - \frac{k}{p}\right), \text{ unde: } k \leq p = \frac{2h}{\lambda}, \text{ deoarece mărimea}$$

numărului  $k$  se micșorează atunci când valoarea unghiului de incidență crește.

b) Pe un același grafic, pentru  $\lambda = 508,6 \text{ nm}$ , să se construiască porțiunile din curbe care descriu variațiile mărimilor  $i_k^2, i_{k+1}^2, i_{k+2}^2$ , funcție de mărimea  $h$ , atunci când aceasta variază de la  $2542,5 \mu\text{m}$  la  $2543,8 \mu\text{m}$ .

R: Este necesar să se reprezinte funcția  $i^2 = f(h)$  pentru diferite valori ale parametrului  $k$ . Această legătură are forma:  $i_k^2 = 2 - \frac{k\lambda}{h}$  și reprezintă o familie de hiperbole.

Deoarece  $h = \frac{p}{2}\lambda$ , grosimii  $h = 2543 \mu\text{m}$  îi corespunde, în centru

(incidență normală), ordinul de interferență  $p = 10000$ , iar  $i_{10000}^2 = 0$  ( $k = p$ ).

Dacă grosimea  $h$  crește sau scade cu  $n \frac{\lambda}{2}$  ( $h = 2543 \pm n \frac{\lambda}{2}$ ), atunci ordinul de interferență în centru va fi:

$p' = 10000 \pm n$ . Pentru toate aceste grosimi centrul va fi iluminat.

Pentru  $h = 2543 \mu\text{m}$  ( $p = 10^4$ ) inelele luminoase succesive corespund la  $k = 10^4 - n$ , iar unghiurile de incidență corespunzătoare sunt:

$$i_n^2 = 2 \left(1 - \frac{10^4 - n}{10^4}\right) = \frac{n}{5000}$$

Dacă:  $h' = \left(2543 + \frac{\lambda}{2}\right) \mu\text{m}$ , adică  $p' = 10001$ , atunci:

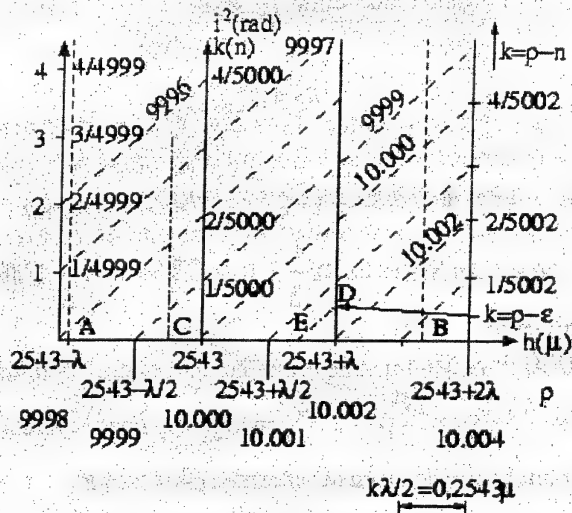
$$i_n'^2 = 2 \left(1 - \frac{1001 - n}{10001}\right) = \frac{n}{5000,5}$$

iar pentru  $h'' = \left(2543 - \frac{\lambda}{2}\right) \mu\text{m}$ , ( $p'' = 9999$ ), se obține:  $i_n''^2 = \frac{n}{4999,5}$ .

În cazul de față grosimea  $h$  a etalonului variază între punctele A( $2542,5 \mu\text{m}$ ) și B( $2543,8 \mu\text{m}$ ) (fig. 91). Pe axa absciselor este reprezentată variația grosimii etalonului, (a ordinului de interferență) pentru incidență normală. Pe axa ordonatelor, corespunzător fiecărui ordin de interferență  $p$  întreg (centru iluminat), sunt reprezentate valorile unghiului de incidență ( $i_{k(n)}^2$ ) corespunzătoare inelelor luminoase. Curbele punctate unesc valorile unghiurilor de incidență ale inelelor

aproximativ, pot fi considerate paralele între ele. Panta lor este:

$$\tan \alpha = \frac{1}{5000} \frac{2}{\lambda} = \frac{1}{1221,5} \text{ rad}/\mu\text{m}$$



**Fig. 91**

c) Să se utilizeze aceste curbe pentru analiza deplasării inelelor funcție de variația mărimii  $h$  și la determinarea unghiurilor de incidență corespunzătoare valorilor  $h = 2543\mu\text{m}$  și  $h = 2542,9\mu\text{m}$ .

**R:** Dacă valoarea mărimii  $h$  crește atunci inelele se lărgesc, iar pentru

$\Delta h = \frac{\lambda}{2}$  în centru apare un inel nou; dacă valoarea  $h$  se micșorează, diametrul

inelor de micșorează, iar pentru  $\Delta h = -\frac{\lambda}{2}$ , în centru, dispăre un inel. Această

concluzie reiese din analiza graficului sau din relația:  $\Delta = 2h \left( 1 - \frac{i_k^2}{2} \right) = k\lambda$ , unde

valoarea  $k$  este constantă. De asemenea trebuie remarcat faptul că atunci când valoarea  $h$  scade distanța dintre inelele vecine crește, și invers.

**De ex.**

$$p = 10004 \rightarrow i_{n=4}^2 - i_3^2 = \frac{1}{5002}, \text{ iar pentru,}$$

$$p = 9998 \rightarrow i_{n=4}^2 - i_3^2 = \frac{1}{4999}$$

*Determinarea unghiurilor de incidență.* Pentru  $h = 2543\mu\text{m}$  unghiurile de incidență, conform graficului din fig. 91, sunt egale cu:

$$i_n = \sqrt{\frac{n}{5000}} \text{ rad.}$$

Pentru  $h = 2542,9 \mu m$  (punctul C) unghiurile de incidență vor fi egale

$$\text{cu.} \quad \sqrt{\frac{n}{5000} - 0,1 \tan \alpha} \approx \frac{1}{100} \sqrt{2n - 0,8}.$$

3. - Să considerăm cazul când ordinul  $p$  de interferență în centru nu este întreg:  $p = k + \varepsilon$  ( $k$  - număr întreg,  $\varepsilon$  - un excedent fracționar). Să se evalueze mărimea  $\varepsilon$  funcție de  $k$  și de unghiul  $i$  în raport cu primul inel (adică plecând de la centru).

**Aplicație.** Se compară o lungime de undă  $\lambda'$ , foarte apropiată de  $\lambda = 561,56 \text{ nm}$ , cu lungimea de undă etalon  $\lambda = 508,5824 \text{ nm}$ . Se găsește că pentru o aceeași grosime  $h$  a interferometrului, "diametrele unghiulare"  $2i$  ale primului inel  $\lambda$  și ale primului inel  $\lambda'$ , evaluate în "numărul de rotații complete  $m$  ale micrometrului ocular" sunt  $m = 7,06$ , respectiv  $m' = 5,72$ . Etalonarea prealabilă a micrometrului a dat  $2i = 0,002649 \text{ m}$ , unde valoarea  $i$  este exprimată în radiani. Pe de altă parte măsurători suplimentare au permis să se stabilească că primul inel corespunde ordinului de interferență  $k = 19484$ . Să se calculeze valoarea lungimii de undă  $\lambda'$ .

**R:** În centru nu avem maxim de intensitate ci o situație intermediară între maxim și minim (pe graficul din fig. 91, punctul D). Pe grafic, în punctul E, se poate scrie relația:  $2h = (k + \varepsilon)\lambda$ , iar pentru inelul luminos din punctul D se poate scrie:

$$2h\left(1 - \frac{i_k^2}{2}\right) = k\lambda.$$

De unde:  $\varepsilon = \frac{h}{\lambda} i_k^2 \cong \frac{k}{2} i_k^2 = \frac{k}{8} (2i_k)^2$ .

Aplicație: Lungimii de undă etalon  $\lambda = 508,5824 \text{ nm}$  îi corespunde "diametrul unghiular"  $2i = 7,06 \cdot 2649 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$  și  $k = 19484$ .

$$\text{Deci: } \varepsilon = \frac{19484 \cdot (7,06 \cdot 2649 \cdot 10^{-6})^2}{8 \cdot 10^{12}} \cong 0,85185.$$

Ordinul de interferență al primului inel luminos corespunzător lungimii de undă  $\lambda'$  este:

$$(k + \varepsilon)\lambda = k'\lambda', \text{ deci } k' = (k + \varepsilon) \frac{\lambda}{\lambda'} = 17646 \pm 0,34.$$

O eroare de 0,1 asupra lui  $\lambda'$  antrenează cunoașterea mărimii  $k'$  până la  $\frac{1}{56000}$ , deci  $k'$  este egal cu 17646.

Calculăm excedentul fracționar  $\varepsilon'$  corespunzător lui  $k'$ :

$$\varepsilon' = \frac{17646 \cdot (5,72 \cdot 2649 \cdot 10^{-6})^2}{8} = 0,506,$$

$$\text{deci: } \lambda' = \frac{19484,851 \cdot 5085,824}{17646,506} = 561,5645 \text{ nm}$$

4. - Să considerăm din nou relația  $I = I(\varphi)$ .

a) Să se reprezinte grafic, pentru o variație a mărimii  $\varphi$  între limitele

$2k\pi \div 2(k+1)\pi$ , funcția  $\frac{I}{I_{\max}}$ , considerând valorile  $R = 0,5; 0,7; 0,9$ . Se vor

utiliza ordonate logaritmice. Să se arate că este logic să se definească "contrastul" prin raportul  $C = \frac{I_M}{I_m}$ . Care este valoarea contrastului? Cum variază contrastul în funcție

de coeficientul de reflexie  $R$ ?

R: Anterior s-a stabilit că (vezi tabelul și fig. 92):

$$I(\varphi) = \frac{I}{I_M} = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \text{ unde: } I_M = \left( \frac{T}{1-R} \right)^2 \text{ și } m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

Intensitatea luminoasă în planul focal al lentilei variază între o valoare maximă  $I_M$  și una minimă  $I_m$ . Deci inelele luminoase apar pe un fond care nu este complet întunecat. Prin urmare "contrastul" trebuie definit sub forma:

	$\varphi = 0$	60	90	120	180
	$\sin^2 \varphi/2 = 0$	1/4	1/2	3/4	1
$R = 0,5$ $m = 8$	$I(\varphi)$ 1	1/3	1/5	1/7	1/7
$R = 0,7$ $m = \frac{280}{9}$	1	1/8,77	1/16,5	1/24,3	1/32
$R = 0,9$ $m = 360$	1	1/91	1/181	1/271	1/361

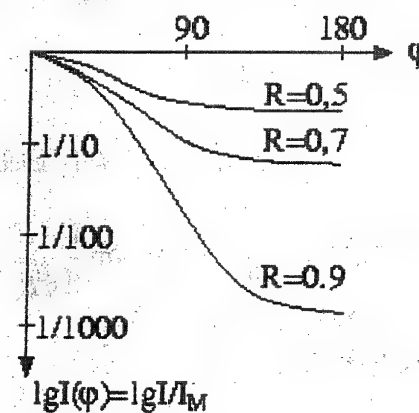


Fig. 92

$$C = \frac{I_M}{I_m} = \frac{I_M}{\frac{I_M}{1+m}} = 1 + m = \left( \frac{1+R}{1-R} \right)^2.$$

$$R = 0,5 \quad 0,7 \quad 0,9$$

$$C = 9 \quad 32 \quad 361$$

Deci:

(începând cu valorile  $R = 0,7$  contrastul figurii de interferență crește foarte repede - fig. 93).

b) Să se evalueze în fracțiuni de interfranjă lărgimea unui inel luminos corespunzătoare "semînalțimii" acestuia. Să se calculeze în funcție de  $R$  "coeficientul



de finețe"  $F$ , adică raportul dintre interfranjă și lărgimea determinată mai sus. Cum variază  $F$  în funcție de  $R$ ?

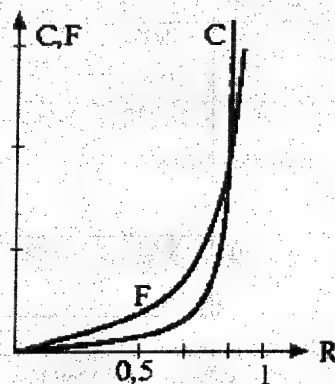


Fig. 93

R: Se obține:  $I_{\varphi_1} = \frac{I_M}{2}$ , dacă:  $m \sin \frac{\varphi_1}{2} = 1$ , adică:

$$\varphi_1 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{m}} = 2 \arcsin \frac{1-R}{2\sqrt{R}}$$

(acest unghi reprezintă diferența de fază  $\varphi_{I_M/2} - \varphi_{I_M}$ ).

Deci coeficientul de finețe este:

$$F = \frac{\pi}{\varphi_1} = \frac{\pi}{2 \arcsin \frac{1-R}{2\sqrt{R}}} \quad (\text{fig. 93}).$$

$R = 0,5$	$\varphi_1 = 41^\circ 24'$	$F = \frac{180^\circ}{\varphi_1} = 4,32$
$R = 0,7$	$\varphi_1 = 29^\circ 39'$	$F = 8,7$
$R = 0,9$	$\varphi_1 = 6^\circ 2'$	$F = 30$

c) Admițând că interferometrul poate să separe două radiații ale căror lungimi de undă diferă prin intervalul  $d\lambda$ , care corespunde unui decalaj între maximele de intensitate ale inelelor vecine egal cu lărgimea inelului, să se calculeze puterea de

rezoluție  $R = \frac{\lambda}{d\lambda}$  funcție de ordinul de interferență  $k$  și de coeficientul de finețe  $F$ .

Cum variază puterea de rezoluție funcție de  $R$ ?

R: Într-un punct dat al planului focal, adică pentru o valoare determinată a unghiului de incidență  $i$ , diferența de drum optic  $\Delta = 2h \cos i$  este constantă.

Diferența de fază  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$  variază cu lungimea de undă a radiației:  $\frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$ .

Să considerăm un inel luminos corespunzător radiației  $\lambda$ ; în acest caz avem  $\Delta = k\lambda$  și  $\varphi = 2k\pi$ . În același loc, dacă pentru radiația  $\lambda + d\lambda$  avem o diferență de fază  $\varphi \pm 2\varphi_1$ , cele două radiații apar separate (fig. 94). Deci  $d\varphi = 2\varphi_1$  prin urmare:

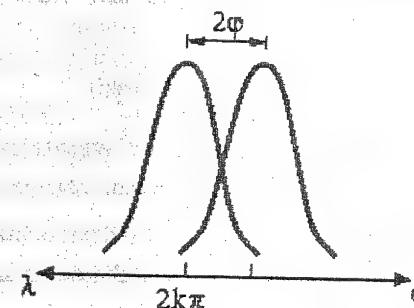


Fig. 94

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{\varphi}{d\varphi} = \frac{2k\pi}{2\varphi_1} = kF.$$

Variația mărimii  $R$  funcție de coeficientul de reflexie  $R$  este asemănătoare cu variația mărimii  $F$  funcție de  $R$ .

c) Să se analizeze coeficientul de transmisie  $\tau$  al interferometrului corespunzător intensității maxime a ineleor. Să se evalueze transmisia funcție de mărimea  $R$  și de absorbția  $A = 1 - (T + R)$ . Cum variază mărimea  $\tau$ ? Se poate, fără a influența transmisia interferometrului, să se crească mărimea  $R$  peste valoarea 0,9?

R: Transmisia interferometrului este dată de relația:

$$\tau = \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{I}{I_0}.$$

În cazul intensității maxime:

$$\tau = \frac{I_M}{I_0} = I_M = \left( \frac{T}{1-R} \right)^2, \text{ deoarece } I_0 = 1.$$

$$\text{Deci: } \tau = \left[ \frac{1-(A+R)}{1-R} \right]^2 = \left[ 1 - \frac{A}{1-R} \right]^2, \text{ unde: } A \ll R.$$

Dacă stratul reflectant este neabsorbant, atunci  $A = 0$ , deci  $\tau = 1$ . În realitate, pentru a crește coeficientul de reflexie  $R$  se crește grosimea stratului metalic, ceea ce determină și o creștere a coeficientului de absorbție  $A$ . Pentru stratul masiv de metal avem  $T = 0$ ,  $A = 0,05$  și  $R = 0,95$ , însă  $\tau = 0$ , deci există o grosime optimă a stratului de metal.

5. - Pentru a înlătura imposibilitatea de a crește coeficientul de reflexie  $R$  fără a diminua valoarea transmisiei  $\tau$  a interferometrului, se utilizează lame semitransparente obținute prin depunerea de straturi subțiri alternative (indice de refracție mic / indice de refracție mare) de grosimi convenabile.

a) Să considerăm la început o lamă de sticlă transparentă cu indicele de refracție  $n_2$  pe care este depus un strat subțire transparent, plan-parallel cu indicele de refracție  $n_1 > n_2$ . O rază incidentă suferă în acest strat reflexii multiple. Să se arate că în cazul unei incidențe normale și a unui grosimi a stratului de un sfert de lungime de undă ( $n_1 h = \frac{\lambda}{4}$ ), valoarea coeficientului echivalent de reflexie este dată de relația:

$$R = \left( \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2,$$

care este mai mare decât coeficientul de reflexie al lamei de sticlă neacoperită. Ex.:  $n_1 = 2,3$  și  $n_2 = 1,5$ . Să se generalizeze această problemă.

R: Să considerăm o suprafață plană ce separă două medii cu indicii de refracție  $v_1$  și  $v_2$ . Să notăm cu  $r$ , respectiv  $r'$  coeficienții de reflexie pentru amplitudine pentru cele două sensuri de traversare a suprafeței. Coeficienții de transmisie sunt  $t$ , respectiv  $t'$ . Conform relațiilor lui Fresnel relativ la reflexie pe suprafețe sticloase sub incidență normală, se obține:

$$r = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \text{ și } r' = -r = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}$$

$$t = 1 - r = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} \text{ și } t' = 1 - r' = 1 + r = \frac{2v_1}{v_1 + v_2},$$

de unde:

$$tt' = 1 - r^2 \text{ (fig. 95).}$$

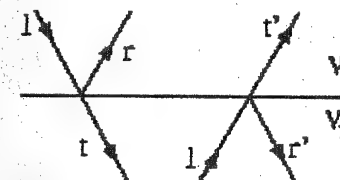


Fig. 95

În relațiile de mai sus s-a considerat defazajul  $\Delta\varphi = \pi$  care apare atunci când raza incidentă și cea reflectată se află într-un mediu cu indicele de refracție mai mic decât mediul pe care se face reflexia. În această problemă trebuie să considerăm două suprafețe: prima separă două medii de indici de refracție 1 și  $n_1$ , iar cea de a doua separă mediile de indici  $n_1$  și  $n_2$  (fig. 96).

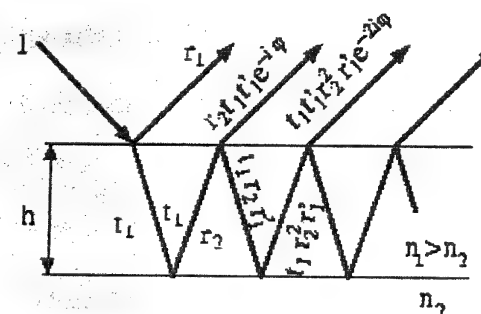


Fig. 96

Pentru prima suprafață, aplicând relațiile de mai sus, se obține:

$$r_1 = \frac{1 - n_1}{1 + n_1}, \quad r'_1 = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}, \quad t_1 t'_1 = \frac{4n_1}{(n_1 + 1)^2}.$$

$$\text{Pentru cea de a doua suprafață: } r_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}.$$

Amplitudinea primei raze reflectate (dacă valoarea amplitudinii incidente este egală cu 1) este egală cu  $r_1 = \frac{1 - n_1}{1 + n_1}$ . Cea de a doua rază a fost transmisă ( $t_1$ ).

reflectată ( $r_2$ ) și din nou transmisă ( $t_1'$ ). Drumul optic suplimentar  $2n_1h_1$  a introdus o întârziere de fază egală cu  $\varphi$ , deci faza a celei de a doua raze va fi:  $tt'r_2 e^{-i\varphi}$ . Cu alte cuvinte, așa cum am stabilit și la analiza interferometrului, la fiecare reflexie amplitudinea precedentă se amplifică cu  $q = r_1'r_2 e^{-i\varphi}$ .

Amplitudinea rezultantă totală este:

$$A = r_1 + t_1 t_1' r_2 e^{-i\varphi} + t_1 t_1' r_1' r_2^2 e^{-i2\varphi} + t_1 t_1' r_1' r_2^3 e^{-i3\varphi} + \dots =$$

$$= \frac{1-n_1}{1+n_1} + t_1 t_1' r_2 e^{-i\varphi} (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{1-n_1}{1+n_1} + \frac{t_1 t_1' r_2 e^{-i\varphi}}{1 - r_1' r_2 e^{-i\varphi}}$$

Deoarece grosimea stratului depus este egală cu un sfert de lungime de undă, atunci:

$$n_1 h_1 = \frac{\lambda}{4}, \text{ deci } \Delta = \frac{\lambda}{2}, \text{ iar } \varphi = \pi, \text{ de unde: } e^{-i\varphi} = -1.$$

Deci:

$$A = -\frac{n_1^2 - n_2}{n_1^2 + n_2}$$

Prin urmare coeficientul de reflexie pentru amplitudine este egal cu:  $\frac{n_1^2 - n_2}{n_1^2 + n_2}$ , iar

vibrația reflectată a suferit un defazaj egal cu  $\pi$ . Coeficientul de reflexie pentru intensitate este egal cu:

$$R = \left( \frac{n_1^2 - n_2}{n_1^2 + n_2} \right)^2$$

Pentru o lamă de sticlă ( $n = 1,5$ ) neacoperită cu strat reflectant:

$$R = \left( \frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} \right)^2 = 0,04. \text{ Pentru aceeași lamă acoperită cu strat reflectant de grosime egală cu un sfert de lungime de undă și cu } n_1 > n_2 \text{ (} n = 2,3 \text{) se obține un coeficient de reflexie: } R = 0,314 \gg 0,04.$$

**Generalizare.** Să considerăm o lamă *semitransparentă* pe care au fost depuse straturi alternative (indice de refracție mic/indice de refracție mare) în așa fel încât în fiecare strat drumul optic  $\Delta = nh$  este egal cu un sfert de lungime de undă. Se observă ușor că oricât de profund ar fi stratul pe care are loc reflexia razei incidente, întârzierea de fază corespunde totdeauna la  $\Delta = \frac{\lambda}{2}$ . Deci toate razele, oricâte reflexii

și transmisii ar suferi, sunt în fază. Remarcăm că un strat prezintă un drum optic egal cu  $\frac{\lambda}{4}$  numai pentru o radiație sau un domeniu spectral îngust în jurul acestei lungimi de undă, deci coeficientul de reflexie variază în mod selectiv cu lungimea de undă.

b) Să se arate că raportul  $\frac{T}{1-R}$  rămâne același indiferent dacă se utilizează o lamă de sticlă *semitransparentă* obișnuită sau una a cărei reflexie a fost îmbunătățită prin depunerea de straturi  $\frac{\lambda}{4}$  alternative. Prezintă interes această proprietate pentru un interferometru Fabry-Perot?

**Aplicație.** Să se calculeze puterea de rezoluție teoretică pentru  $\lambda = 546,1 \text{ nm}$  a unui interferometru Fabry-Perot de grosime  $h = 7,5 \text{ mm}$  a cărui fațe *semitransparente* sunt acoperite de straturi alternative de criolit și sulfură de zinc de grosime optică egală cu  $\frac{\lambda}{4}$ . Coeficientul de reflexie al straturilor este  $R = 0,94$ , iar  $A = 0,01$  și  $T = 0,05$ .

**R:** Deoarece straturile subțiri depuse pe lamă sunt transparente (coeficient de absorbție foarte mic), utilizând straturi cu grosimi optice de  $\frac{\lambda}{4}$  din materiale cu  $n_1 > n_2$  coeficientul de reflexie al plăcilor etalonului poate fi mărit fără a modifica în mod sensibil coeficientul de absorbție. Deoarece crește valoarea mărimii  $R$ , deasemenea crește și valoarea puterii de rezoluție a etalonului.

Ex.:  $R = 0,94$ , deci  $m = \frac{4R}{(1-R)^2} = \frac{37,6}{36} \cdot 10^6$ .

**Semilățimea inelului luminos:**

$$I = \frac{I_M}{2}, \text{ pentru: } \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = \frac{1}{m}, \text{ de unde: } \varphi_1 = \frac{6}{67} \text{ rad.}$$

Contrastul:  $F = \frac{2\pi}{2\varphi_1} = \frac{2\pi \cdot 97}{2 \cdot 6} = 51$

(a se compara cu rezultatele anterioare).

Ordinul de interferență:  $k = \frac{2h}{\lambda} 27468$ .

Puterea de rezoluție:  $R = k F = 1400000$ .

6. - Se va analiza modul cum imperfecțiunile suprafeței interferometrului limitează posibilitățile acestuia de a fi folosit.

a) Să presupunem că suprafața utilă  $S$  a acestuia prezintă accidente de relief care determină variații ale mărimii  $\varphi$  cu valori  $d\varphi$  cuprinse între valorile extreme  $\varepsilon \div -\varepsilon$ . Se admite că în acest interval funcția de repartiție  $f = \frac{ds}{d\varphi}$  este constantă.

Să se calculeze noua expresie a funcției  $I = I(\varphi)$ .

**R:** Pentru un fascicul incident care acoperă o suprafață  $S$  fără imperfecțiuni s-

a stabilit că:

$$I = \frac{\tau}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Imaginea sursei luminoase se formează în vecinătatea lamei de sticlă, deci se poate considera că în diferite puncte ale lamei oscilațiile radiației optice sunt necoerente. Intensitatea totală este egală cu suma intensităților oscilațiilor elementare,

adică:

$$I = \frac{\tau}{S} \int \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} ds.$$

Dacă suprafața este perfectă atunci diferența de fază  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos i$  este aceeași oricare ar fi elementul  $ds$ . Diferența de fază depinde numai de unghiul de incidență  $i$ , ceea ce determină și apariția inelelor luminoase, respectiv întunecate. Dacă suprafața  $S$  este imperfectă, atunci mărimea  $h$  variază de la un punct la altul ceea ce determină o variație a mărimii  $h$ , deci:

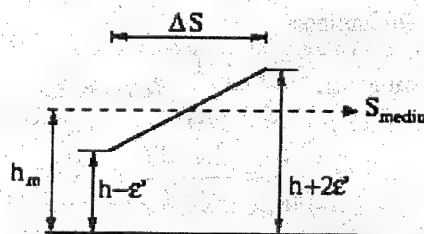


Fig. 97

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial i} di + \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds.$$

Pentru a analiza influența imperfecțiunilor suprafeței să considerăm  $i = 0$ , adică să considerăm razele normale la o oarecare suprafață medie (fig. 97). Presupunem

deasemenea că  $f = \frac{ds}{d\varphi} = \text{ct.}$  în interval  $\Delta S$ , adică grosimea  $h$  variază liniar în jurul valorii medii  $h_m$ , ceea ce determină o variație a mărimii  $\varphi$  în intervalul  $\varphi - \varepsilon \div \varphi + \varepsilon$ . Pentru această suprafață se poate scrie:

$$I(\varphi) = \frac{\tau}{\Delta S} \int_{\varphi - \varepsilon}^{\varphi + \varepsilon} \frac{f}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \frac{\tau}{2\varepsilon} \int_{\varphi - \varepsilon}^{\varphi + \varepsilon} \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi,$$

deoarece:  $\Delta S = f\Delta\varphi = 2\varepsilon f$ .

b) Să se deducă noua valoare a contrastului  $C$ . Să se calculeze pentru  $R = 0,9$  și  $\varepsilon = 0,17 \text{ rad}$ , de câte ori contrastul real este mai mic decât cel teoretic.

**R:** Pentru a determina contrastul trebuie să se determine pentru cazul suprafeței imperfecte valorile  $I'_M$  și  $I'_m$ . Dacă suprafeței  $\Delta S$ , pentru o lungime de undă  $\lambda$  dată, o grosime și un unghi  $i$  mic dat îi corespunde un minim de intensitate

$\varphi = (2k+1)\pi$ , adică  $\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cong 1$ , atunci se obține:

$$I'_m \cong \frac{\tau}{2\varepsilon} \int_{\varphi - \varepsilon}^{\varphi + \varepsilon} \frac{1}{1 + m} d\varphi = \frac{\tau}{1 + m} = I_m,$$

prin urmare neregularitățile suprafeței influențează foarte puțin asupra valorii intensității minime transmise de interferometru.

Dacă valorii  $h_m$  (mijlocul lui  $\Delta S$ ) îi corespunde un maxim, atunci:

$\varphi = 2k\pi$ , adică  $\sin^2 \frac{\varphi}{2} \cong \frac{\varphi^2}{4}$ , deci:

$$\begin{aligned} I'_M &\cong \frac{\tau}{2\varepsilon} \int_{\varphi - \varepsilon}^{\varphi + \varepsilon} \frac{d\varphi}{1 + m \frac{\varphi^2}{4}} = \frac{\tau}{2\varepsilon} \left[ \frac{2}{\sqrt{m}} \arctan \frac{\varphi \sqrt{m}}{2} \right]_{\varphi - \varepsilon}^{\varphi + \varepsilon} = \\ &= \frac{2\tau}{\varepsilon \sqrt{m}} \arctan \frac{\varepsilon \sqrt{m}}{2} \langle I_M = \tau \end{aligned}$$

Prin urmare imperfecțiunile suprafeței influențează mult asupra valorii intensității maxime transmise de interferometru.

Contrastul:

$$C(\varepsilon) = \frac{I'_M}{I'_m} = \frac{\tau}{\tau} \frac{2}{\varepsilon\sqrt{m}} \arctan \frac{\varepsilon\sqrt{m}}{2} = C_0 \frac{\arctan \frac{\varepsilon\sqrt{m}}{2}}{\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{2}}$$

Dacă:  $R = 0,9$ , atunci  $m = \frac{4R}{(1-R)^2} = 360$ , deci:

$$C_0 = 1 + m = 361.$$

Pentru:  $\varepsilon = 0,17 \text{ rad}$ ,  $\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{2} \cong 1,61$ ,  $\arctan 1,61 \cong 1 \text{ rad}$

$$C(\varepsilon) = 361 \frac{1}{2} = 220.$$

Contrastul  $C(\varepsilon) = 220$  reprezintă aproximativ 60% din valoarea sa teoretică  $C_0 = 361$ .

### Proprietățile generale ale unui interferometru Fabry-Perot.

Considerăm un interferometru Fabry-Perot ale cărui straturi *semitransparente* sunt caracterizate prin coeficientul de reflexie  $R$  și cel de transmisie  $T$ . Coeficientul de reflexie este definit ca raportul dintre fluxul de radiație optică reflectat și cel incident, iar coeficientul de transmisie ca raportul dintre fluxul de radiație optică transmis și cel incident. Se notează cu  $A$  coeficientul de absorbție al fiecărui strat metalic, adică raportul dintre fluxul de radiație optică absorbit în lamă și cel incident. Se neglijează alte pierderi de radiație optică. Dispozitivul este considerat dispus într-un spațiu vidat.

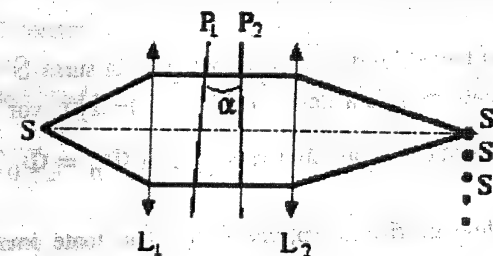


Fig. 98

1. - Se presupune pentru coeficientul de reflexie o valoare  $R \cong 1$  și se realizează dispozitivul din fig. 98. O sursă punctiformă  $S$  se află în focalul lentilei  $L_1$ ; în drumul razelor fasciculului paralel se află așezat interferometrul FP ușor dereglat (cele două plăci *semireflectante* formează un unghi  $\alpha$  mic). Lentila  $L_2$  recepționează toate razelor ce ies din interferometru și le focalizează în planul focal. Să se arate că în planul focal al lentilei  $L_2$  se formează o serie de imagini punctuale  $S_1, S_2, S_3, \dots$ .



care sunt foarte apropiate dacă valoarea  $\alpha$  este foarte mică. Notând cu  $\Phi_0$  fluxul luminos corespunzător sursei  $S_1$  în lipsa interferometrului, să se calculeze în funcție de  $\Phi_0$ ,  $R$  și  $T$  fluxurile corespunzătoare imaginilor  $S_1, S_2, S_3, \dots$ .

**R:** Intensitatea primei raze emergente este egală cu:

$$I_1 = I_0 T^2$$

Cea de a doua rază suferă o deviație egală cu unghiul  $2\alpha$  și două reflexii suplimentare:

$$I_2 = I_0 T^2 R^2$$

Deviația celei de a treia raze este egală cu  $4\alpha$ , iar

$$I_3 = I_0 T^2 R^4$$

pentru a  $n$ -a rază deviația este de  $2(n-1)\alpha$ , respectiv

$$I_n = I_0 T^2 R^{2(n-1)}$$

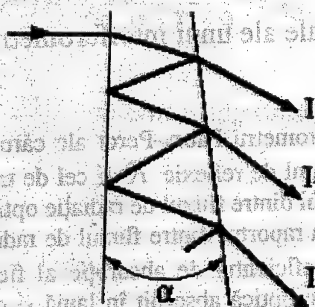


Fig. 99

Dacă considerăm fasciculul de raze ce provine de la sursa  $S$  sub forma unui fascicul paralel, toate razele ce suferă deviația  $D = 2(n-1)\alpha$  vor fi focalizate în aceeași imagine  $S_n$ , iar fluxul corespunzător va fi egal cu  $\Phi_n = \Phi_0 T^2 R^{2(n-1)}$ .

2. - O celulă fotoelectrică recepționează simultan toate imaginile  $S_1, \dots, S_n, \dots$ , fluxul de radiație măsurat fiind egal cu  $\Phi_1$ . Dacă se îndepărtează lama  $P_1$ , valoarea fluxului măsurat devine  $\Phi_2$ ; dacă se îndepărtează și a doua lamă  $P_2$  această valoare devine egală cu  $\Phi_0$ . Să se calculeze factorii  $R, T$ , și  $A$  funcție de mărimile  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$ .

**Aplicație.** Să se calculeze factorii  $R, T$ , și  $A$  dacă mărimea  $\Phi_0$  este considerată egală cu 100, iar valorile fluxurilor  $\Phi_1, \Phi_2$  sunt egale cu 0,21, respectiv 2.

**R:** Dacă celula recepționează simultan toate imaginile, atunci:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_0 T^2 + \Phi_0 T^2 R^2 + \Phi_0 T^2 R^4 + \dots + \Phi_0 T^2 R^{2(n-1)} + \dots = \\ &= \Phi_0 T^2 (1 + R^2 + R^4 + \dots + R^{2(n-1)} + \dots) = \Phi_0 T^2 \frac{1}{1 - R^2} \end{aligned}$$

$$\text{Dacă lipsește lama } P_1: \Phi_2 = \Phi_0 T, \text{ de unde: } T = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{2}{100}$$

$$\text{Însă: } 1 - R^2 = \frac{\Phi_0}{\Phi_1} T^2 = \frac{\Phi_0}{\Phi_1} \left( \frac{\Phi_2}{\Phi_0} \right)^2, \text{ deci: } R = 0,9$$

$$\text{De unde: } A = 1 - (T + R) = 0,08$$

3. - Presupunând pentru  $R$  o valoare foarte apropiată de 1, să se calculeze numărul de ordine  $n$  al imaginii  $S_n$  căreia îi corespunde un flux de radiație de  $e^6 \cong 400$  ori mai slab decât fluxul primit de  $S_1$ .

**Aplicație.** Să se determine ordinul  $n$  pe baza datelor de la problema precedentă.

**R:** De fiecare dată când se trece la imaginea următoare fluxul de radiație se înmulțește cu  $R^2$ . Deoarece pentru o imagine oarecare  $n$  fluxul de radiație reprezintă  $\frac{1}{e^6} \cong \frac{1}{400}$  din fluxul corespunzător lui  $S_1$ , atunci se poate scrie:  $(R^2)^{n-1} = e^{-6}$ ,

$$\text{de unde: } n = 1 - \frac{3}{\ln R}$$

$$\text{Dacă } R = 0,9, \text{ atunci } n = 28$$

Dacă  $R$  este foarte apropiat de valoarea 1, atunci  $R = 1 - \varepsilon$ , iar

$$\ln R = -\varepsilon, \text{ de unde: } n = 1 - \frac{3}{\varepsilon}$$

$$\text{De ex.: } \varepsilon = 0,1, \text{ atunci } n = 31, \text{ iar pentru } \varepsilon = 0,05, n = 61$$

Deci pentru  $R = 0,9$  fluxul corespunzător imaginii a 28-a este egal cu  $\frac{1}{e^6}$

din fluxul recepționat de  $S_1$ , cu alte cuvinte la interferometre are loc fenomenul de interferență a unui număr mare de fascicule. În aceasta constă și cauza fineții inelelor de interferență.

4. - Presupunem că etalonul Fabry-Perot este reglat precis, adică lamele  $P_1$  și  $P_2$  sunt riguros paralele între ele, iar grosimea stratului de aer delimitat de aceste lame este egal cu  $h$ . Se înlătură lentila  $L_2$ . Etalonul este iluminat de o sursă  $S$ , punctiformă, monocromatică, caracterizată prin lungimea de undă  $\lambda$ , iar observarea figurii de interferență se face la infinit într-o direcție ce face un unghi  $i$  cu normala la etalon,  $i$  fiind egal cu unghiul de incidență. Să se calculeze diferența de fază  $\varphi$  ce apare între unda transmisă ( $I_1$ ) și următoare undă care suferă două reflexii suplimentare pe lamele interferometrului ( $I_2$ ). Să se calculeze intensitatea luminoasă  $I(i)$  observată la infinit în direcția definită de unghiul  $i$ ; să se exprime această intensitate în funcție de  $\varphi$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $A$  și  $I_0$ , unde  $I_0$  reprezintă intensitatea unei incidente. Se va neglija defazajul introdus la transmisia și reflexia pe lamele interferometrului.

$$R: \Delta = 2h \cos i, \text{ deci } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos i \cong \frac{2\pi}{\lambda} 2h \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

$$I(i) = \frac{I_0 T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{I_0 T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{2\pi}{2\lambda} 2h \cos i\right)}$$

5. - Să se arate că raportul  $\frac{I}{I_0}$  se poate scrie sub forma:

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 A(\varphi, R), \text{ unde mărimea } A(\varphi, R) - \text{funcția lui Airy} - \text{nu depinde decât de parametrii } \varphi \text{ și } R.$$

$$R: \frac{I}{I_0} = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

unde:

$$A(\varphi, R) = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \text{ reprezintă funcția lui Airy, iar } m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

6. - Să se reprezinte grafic dependența funcției  $A$  de parametrul  $\varphi$ . Să se calculeze contrastul  $C = \frac{A(2k\pi, R)}{A(2k\pi + \pi, R)}$  și finețea  $F = \frac{2\pi}{\delta\varphi}$ , unde  $\delta\varphi$  reprezintă lățimea la  $\frac{I_M}{2}$  a curbei variației mărimii  $A$  funcție de  $\delta\varphi$ , porțiunea de curbă considerată fiind cuprinsă între  $\varphi = (2k-1)\pi$  și  $\varphi = (2k+1)\pi$  ( $k$  - număr întreg). Să se compare expresia mărimii  $F$  cu expresia numărului  $n$ , care reprezintă numărul de raze utile.

R: Valoarea funcției  $A(\varphi, R)$  devine maximă  $A_M = 1$ , pentru  $\varphi = 2k\pi$ , respectiv minimă  $A_m = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$ , pentru:  $\varphi = (2k \pm 1)\pi$ .

$$\text{Semilățimea: } A = \frac{A_M}{2}, \text{ pentru: } \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = \frac{(1-R)^2}{4R}.$$

$$\varphi_1 = \frac{1-R}{\sqrt{R}}, \text{ de unde: } \delta\varphi = 2\varphi_1 = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}.$$

$$\text{Pentru: } R = 0,8, A = \frac{1}{1 + 80 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$\text{de unde: } A_m = \frac{1}{81}, \text{ iar } A(60^\circ) = \frac{1}{21}, \varphi_1 \cong 13^\circ$$

$$\text{Pentru: } R = 0,9, A = \frac{1}{1 + 360 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

de unde:  $A_m = \frac{1}{361}$ , iar  $A(60^\circ) = \frac{1}{91}$ ,  $\varphi_1 \cong 6^\circ$

$$\text{Contrastul: } C = \frac{A_m}{A_m} = \left( \frac{1+R}{1-R} \right)^2, \quad R=0,8, \quad C=81$$

$$R=0,9, \quad C=361.$$

$$\text{Finețea: } F = \frac{2\pi}{\delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}, \quad R=0,8 \quad 0,9 \quad 0,95$$

$$F=14 \quad 29,9 \quad 61$$

$$n = 1 + \frac{3}{1-R} = 16 \rightarrow 31 \rightarrow 61.$$

Deci dacă valoarea lui  $R$  este apropiată de 1, pentru  $n$  și  $F$  se vor obține valori numerice foarte apropiate. Prin urmare odată cu creșterea mărimii  $R$ , numărul de reflexii devine din ce în ce mai mare, iar inelele luminoase devin din ce în ce mai înguste (fig. 100).

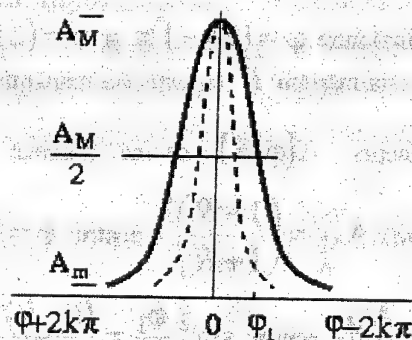


Fig. 100

7. - Interferometrul este iluminat de o sursă  $S'$ , care nu îndeplinește condiția de sursă punctiformă. Cum se modifică figura de interferență?

R: Dacă sursa este punctiformă atunci fiecare punct  $S$  al sursei  $S'$  dă propriul său sistem de inele și, deoarece toate aceste surse punctiforme sunt necoerente, în fiecare punct al câmpului se vor aduna iluminările. Inelele se largesc, iar finețea inelelor dispare.

8. - Considerând intervalul etalonului  $h=1\text{ cm}$  și  $\lambda=500\text{ nm}$  să se calculeze ordinul de interferență la centru și unghiul de incidență corespunzător inelelor luminoase.

$$R: k_0 = \frac{2h}{\lambda} = 40000,$$

$$\text{Inelele luminoase: } 2h \left( 1 - \frac{i_k^2}{2} \right) = k\lambda, \text{ deci: } 1 - \frac{i_k^2}{2} = \frac{k}{k_0},$$

$$i_k = \sqrt{\frac{2}{k_0} \sqrt{k_0 - k}} = \frac{1}{200} \sqrt{2p}.$$

### Proprietățile spațiului situat în interiorul interferometrului

Un interferometru Fabry-Perot, reglat precis, distanța dintre lame fiind egală cu  $h$ , este iluminat sub unghiul de incidență  $i$  cu o undă luminoasă plană, monocromatică cu lungimea de undă  $\lambda$ . Într-un punct  $P$  situat în spațiul dintre lame, la o distanță  $z$  de lama  $P_2$  se întâlnesc două serii de raze: seria  $A(a_1, a_2, \dots)$  și seria  $B(b_1, b_2, \dots)$ .

1. - Să se calculeze intensitatea totală  $a^2$  și  $b^2$  produsă în punctul  $P$  de razele seriei  $A$  și  $B$ .

R: Considerăm lamele  $P_1$  și  $P_2$  foarte subțiri, astfel încât razele trec nedeviate (fig. 101). Amplitudinele:  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , sunt:  $a_0 t, a_0 t r^2, a_0 t r^4, a_0 t r^6, \dots$ , unde:  $t = \sqrt{T}$  și  $r = \sqrt{R}$ .

Sumarea acestor amplitudini considerând defazajul lor conduce la amplitudinea complexă:

$$a_0 t (1 + r^2 e^{-i\varphi} + r^4 e^{-2i\varphi} + \dots) = \frac{a_0 t}{1 - r^2 e^{-i\varphi}},$$

de unde se poate calcula expresia intensității:

$$a^2 = \frac{I_0 T}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} = I_0 \frac{T}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

unde:

$$m = \frac{4R}{(1 - R)^2}.$$

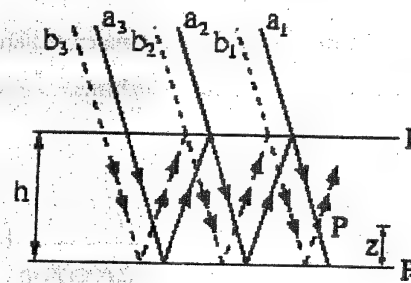


Fig. 101

La fel pentru cel de al doilea fascicul, care prezintă o reflexie în plus:  
Amplitudinele:  $b_1, b_2, b_3, b_4$ ,

$$a_0 t r, a_0 t r^3, a_0 t r^5, a_0 t r^7$$

$$b^2 = \frac{I_0 T R}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} = R a^2, \text{ unde: } \varphi = \frac{4\pi h \cos i}{\lambda}.$$

2. - Să se evalueze, în punctul  $P$ , diferența de fază  $\psi$  ce apare între câmpurile fasciculelor  $a$  și  $b$ ; se va exprima mărimea  $\psi$  funcție de  $\lambda, i$  și  $z$ .

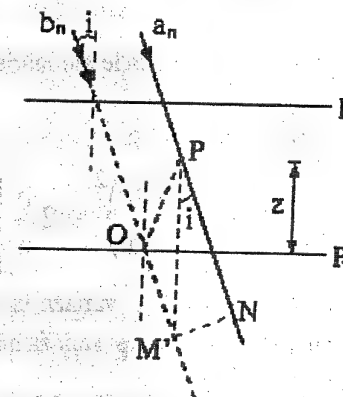


Fig. 102

R: Din fig. 102 rezultă:  $OM' = OP$ . Diferența de drum între razele  $a_n$  și  $b_n$  este:

$$\Delta = PH = 2z \cos i, \text{ deci: } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2z \cos i \text{ sau } \psi?$$

3. - Să se calculeze în punctul P intensitatea radiației totale  $I_0$ ; să se arate că dacă nu se modifică valorile  $\lambda$  și  $i$ , atunci mărimea  $I_P$  este constantă într-un plan paralel cu  $P_2$ .

R:

$$I_P = a^2 + b^2 + 2ab \cos \psi = \frac{I_0 T}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} (1 + R + 2\sqrt{R} \cos \varphi)$$

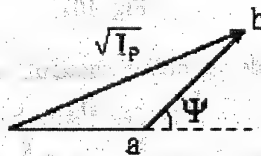


Fig. 103

Deoarece  $\psi = \frac{2\pi}{\lambda} 2z \cos i$ , unde mărimile  $\lambda$  și  $i$  sunt constante, atunci într-un plan paralel cu  $P_2$  este îndeplinită condiția  $z = ct$ , deci intensitatea totală rezultantă  $I_P = ct$  (fig. 103).

4. - Să se stabilească limitele de variație ale mărării  $I_P$  atunci când variază mărimea  $z$ ?

R: Pentru  $z = 0$  se obține  $\psi = 0$  și

$$I_P = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 \left[ 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 + 2 \frac{b}{a} \right] = a^2 (1 + \sqrt{R})^2$$

Rezultă că atunci când parametrul  $z$  variază în domeniul  $0 \div h$ , defazajul  $\psi$  variază în domeniul  $0 \div \varphi$ , iar mărimea  $I_P$  variază între valoarea maximă:

$$I_{P_M} = a^2 (1 + \sqrt{R})^2, \text{ dacă } \Delta = 2z \cos i = k\lambda$$

și valoarea minimă:

$$I_{P_m} = a^2 (1 - \sqrt{R})^2, \text{ dacă } \Delta = 2z \cos i = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

5. - Să se arate că dacă  $R \cong 1$ , valoarea uneia din limitele de variație ale mărimii  $I_P$  este neglijabilă față de cealaltă, condiție admisă în toată problema. În aceste condiții, să se scrie legea de variație a mărimii  $I_P$  funcție de parametrul  $z$ .

Această lege se va exprima funcție de  $R$ ,  $\psi$ ,  $\varphi = \frac{4h\pi \cos i}{\lambda}$ , presupunând coeficientul de absorbție  $A = 0$ .

Aplicație.  $R = 0,95$ ;  $T = 0,05$  și  $A = 0$ .

R: Dacă  $R \cong 1$  se poate scrie:  $\sqrt{R} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ , prin urmare:

$$I_{P_M} = a^2 \left( 2 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \cong 4a^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right), \text{ iar}$$

$$I_{P_m} = \frac{a^2 \varepsilon^2}{4} \text{ (valoare care este neglijabilă față de mărimea } 4a^2 \text{).}$$

$$I_P = a^2 + b^2 + 2ab \cos \psi = a^2 + Ra^2 + 2a^2 \sqrt{R} \cos \psi =$$

$$\begin{aligned} \text{Deci: } &= a^2 \left[ 1 + R + 2\sqrt{R} \left( 2 \cos^2 \frac{\psi}{2} - 1 \right) \right] = \\ &= a^2 \left[ (1 - R)^2 + 4\sqrt{R} \cos^2 \frac{\psi}{2} \right] \cong 4a^2 \sqrt{R} \cos^2 \frac{\psi}{2} \end{aligned}$$

deoarece  $R \cong 1$ . (Dacă s-ar fi compus două vibrații cu amplitudinea  $a$  și diferența de fază  $\psi$  s-ar fi obținut  $I_P = 4a^2 \cos^2 \frac{\psi}{2}$ ).

Mărimea intensității  $I_P$  pentru valori date  $h$ ,  $i$  și  $\lambda$  depinde de parametrul  $z$  prin intermediul mărimii  $\psi$ :

$$I_P \cong 4a^2 \sqrt{R} \cos^2 \frac{\psi}{2} = 4I_0 \frac{T}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{R} \cos^2 \frac{2\pi}{2\lambda} 2z \cos i$$

Dacă lipsește absorbția ( $T = 1 - R$ ), atunci:

$$I_P = 4I_0 \frac{\sqrt{R}}{1-R} \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cos^2 \frac{\psi}{2}$$



Pentru  $R = 0,95$  se obține:  $I_P = I_0 \frac{78}{1 + 1520 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cos^2 \frac{\psi}{2}$

Distribuția intensității în spațiul dintre plăci, pentru valori constante ale parametrilor  $h$ ,  $i$  și  $\lambda$ , funcție de  $z$  are aspectul din fig. 104. Intensitatea  $I_P$  are valori diferite pentru unghiuri de incidență ( $i$ ) diferite. Astfel pentru

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos i = 2k\pi \quad \left( \cos i = \frac{k\lambda}{2h} \right) \text{ se obține } I_P = I_M, \text{ iar pentru}$$

$$\cos i = \frac{\lambda}{2h} (2k+1) \text{ se obține } I_P = I_m.$$

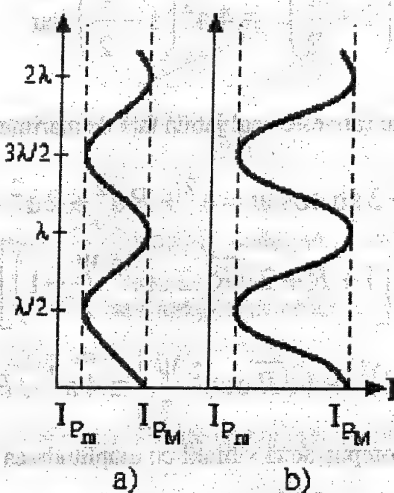


Fig. 104

a) unghi de incidență  $i_1$ ; b)  $i_1 \neq i_2$

6. - Să se calculeze raportul  $\rho$  al energiilor cuprinse în același volum  $V$  (ale cărui dimensiuni sunt mari în raport cu  $\lambda$ ) dispus în interiorul etalonului și în exteriorul acestuia (în unda incidentă). Să se analizeze variația acestui raport funcție de  $i$ . Se va considera  $R = 0,95$ ;  $T = 0,05$  și  $A = 0$ .

R: Atât în interiorul etalonului cât și în exteriorul acestuia densitatea de energie este proporțională cu intensitatea luminoasă, deci:

$$\rho = \frac{I_P}{I_0} = \frac{78}{1 + 1520 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cos^2 \frac{\psi}{2}.$$

Densitatea de energie  $\rho$  este maximă pentru  $\sin \varphi = 0$ , adică

$$\cos i = \frac{k\lambda}{2h}, \text{ iar pentru poziția } z = k\lambda \text{ se obține:}$$

$$\rho_M = 78.$$

În interiorul etalonului, pentru o incidență dată, apar alternări de maxime și minime, ceea ce corespunde la un sistem de unde staționare. În realitate cele două unde plane care se propagă în sens invers în interiorul etalonului nu au aceeași amplitudine (o undă suferă o reflexie în plus); în afară de aceasta o parte din energia din cavitate este transmisă în exterior.

De ex.: pentru  $z = 0$ , deci  $\psi = 0$ , se obține:

$a^2 - b^2 = a^2(1 - R) = a^2 T$ . Pentru a calcula energia din volumul  $V$  ale cărui dimensiuni sunt mari în față de  $\lambda$ , este necesar să se considere valoarea medie a densității  $\rho$  (unghiul de incidență  $i = \text{ct}$ ).

$$\text{De ex.: } \rho = \rho_M \cos^2 \frac{\psi}{2}, \text{ deci:}$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_M \cos^2 \frac{\psi}{2} d\psi = \frac{\rho_M}{2} = 39.$$

### Etalonul Fabry-Perot

Se consideră un etalon Fabry-Perot constituit din două plăci de sticlă  $P$  și  $P'$  semiargintate și separate prin trei tije de sticlă  $AA'$ ,  $BB'$  și  $CC'$  a căror lungime este egală cu aprox. 50 mm, una din ele fiind cu câțiva microni mai lungă. Extremitățile  $A$ ,  $B$  și  $C$  formează un triunghi echilateral înscris într-o circumferință de diametru egal cu 130 mm. La fel și punctele  $A'$ ,  $B'$  și  $C'$ . Etalonul este astfel așezat încât tijele  $BB'$  și  $CC'$  se află într-un plan orizontal.

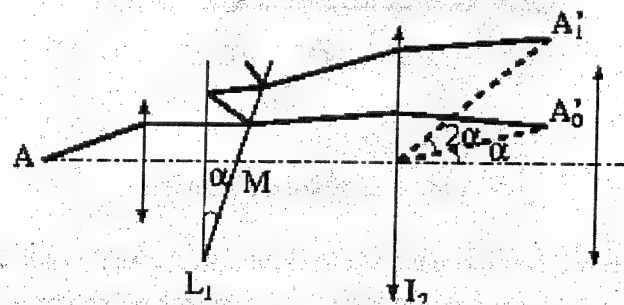


Fig. 105

1. - Trebuie să se măsoare unghiul dintre planele  $P$  și  $P'$ . Pentru aceasta etalonul se iluminează cu lumină albă dată de un colimator a cărui lentilă convergentă are  $f = 2 \text{ m}$ . Lumina transmisă de etalon se observă cu o lunetă reglată pentru infinit. Se constată că dacă fanta colimatorului este verticală, imaginile acesteia sunt situate pe aceeași verticală; dacă fanta este așezată orizontal atunci apar o serie de imagini paralele

între ele a căror intensitate scade de jos în sus, ceea ce arată că planurile  $P$  și  $P'$  fac un unghi între ele. Lărgind fanta colimatorului până la valoarea de  $115 \mu\text{m}$ , imaginile fantei se ating între ele. Să se deducă unghiul dintre  $P$  și  $P'$ . Care tijă este mai lungă? Cu cât este mai lungă față de celelalte tije?

R: Facem la început observația că dacă un fascicul de raze paralele traversează o lamă transparentă cu fețele plan paralele, acesta nu-și schimbă direcția oricare ar fi unghiul de incidență, ci numai suferă o deplasare. În montajul de mai sus placa  $P'$  este rotită cu un unghi  $\alpha$  în jurul unei drepte ( $M$ ) perpendiculară la fig. 105. Punctului  $A$  îi corespund imaginile  $A'_0$ ,  $A'_1$ ,  $A'_2$ , separate de un interval unghiular  $2\alpha$  și care sunt din ce în ce mai puțin intense. În locul punctului  $A$  să fixăm o fantă mobilă și de lărgime variabilă. Dacă fanta  $F$  este perpendiculară la dreapta  $M$ , atunci imaginea acesteia va fi alungită de suprapunerea reflexiilor multiple. Dacă fanta  $F$  este paralelă cu dreapta  $M$  atunci vor apare o serie de imagini  $F'_0$ ,  $F'_1$ ,  $F'_2$ , iluminate din ce în ce mai slab și dispuse la distanțe egale. Dacă lărgim fanta atunci imaginile ei se lărgesc; pentru o anumită lărgime a fantei acestea se ating. În acest caz unghiul  $2\alpha$  dintre imaginile  $A'_0$  și  $A'_1$  este egal cu unghiul sub care se vede fanta din centrul optic al lentilei colimator (fig. 106).

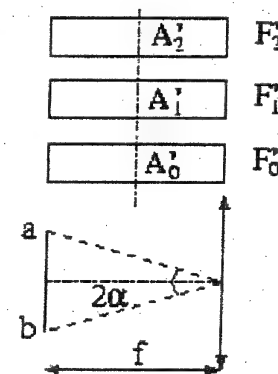


Fig. 106

Deci:  $2\alpha f = ab = 115 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ , de unde:

$$\alpha = \frac{115 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}{4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}} = 28,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Deoarece dreapta  $M$  este orizontală și perpendiculară la fig. 105, iar deplasarea imaginilor apare în plan vertical rezultă că tija  $AA' > BB' = CC'$ . Din fig.

107 rezultă că  $AM = \frac{3D}{4}$ , unde  $D$  reprezintă diametrul cercului circumscris. Prin urmare:

$$AA' - BB' = \alpha AM = \alpha \frac{3D}{4} = 2,8 \mu\text{m}$$

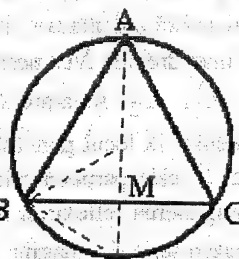


Fig. 107

2. - Se egalează lungimea tijelor, deci lamele  $P$  și  $P'$  devin paralele. Se iluminează etalonul cu radiație monocromatică ( $\lambda = 630 \text{ nm}$ ) și se observă inelele de interferență. Considerând că indicele de refracție al aerului ( $n$ ) variază cu masa specifică  $\rho$  conform legii lui Gladstone  $\frac{n-1}{\rho} = \text{ct}$ , să se calculeze variația ordinului de interferență în centrul inelelor dacă presiunea atmosferică variază cu  $1 \text{ mm col Hg}$ , temperatura fiind constantă. În condiții normale valoarea indicelui de refracție al aerului, egală cu  $1,0003$ .

R: Inelele luminoase apar pentru:  $\Delta = 2nh \cos i + \lambda$  ordinul de interferență:  $k = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2nh \cos i}{\lambda} + 1$ , de unde:

$$\frac{dk}{k-1} = \frac{dn}{n} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial p} dp \quad (\text{pentru centru}).$$

Pentru  $1 \text{ g}$  de gaz perfect se poate scrie:

$$pV = \frac{p}{\rho} = RT, \text{ de unde: } \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \text{ sau:}$$

$$\frac{dn}{n-1} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \quad (\text{pentru } T = \text{ct}).$$

Deci.

$$dk = \frac{2h}{\lambda} (n-1) \frac{dp}{p} = \frac{2 \cdot 50 \text{ mm}}{0,63 \cdot 10^{-3} \text{ mm}} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \frac{1 \text{ tor}}{760 \text{ tor}} = 0,0627$$

3. - Considerând coeficientul de dilatare liniară al tijelor egal cu  $0,35 \cdot 10^{-6}$ , să se calculeze variația temperaturii care ar determina aceeași variație a ordinului de interferență.

R: Deoarece  $k-1 = \frac{2nh}{\lambda}$  se obține:

$$\frac{dk}{k-1} = \frac{dn}{n} + \frac{dh}{h} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial T} dT + \frac{dh}{h}, \text{ unde: } \frac{dh}{h} = \alpha dT$$

Variația ordinului  $k$  determinată de variația temperaturii trebuie să fie egală cu variația determinată de modificarea presiunii, adică:

$$-\frac{n-1}{n} \frac{dT}{T} + \alpha dT = \frac{n-1}{n} \frac{dp}{p},$$

$$\text{de unde: } dT = \frac{(n-1) \frac{dp}{p}}{\alpha n - \frac{n-1}{T}}$$

Dacă  $T = 300 \text{ K}$  se obține:  $dT = -0,607 \text{ K}$ , iar dacă  $T = 273 \text{ K}$  se obține:  $dT = -0,526 \text{ K}$

### Contrast de fază

Se consideră două lame de sticlă  $L_1$  și  $L_2$  cu fețele plan-paralele. Suprafețele  $A_1B_1$  și  $A_2B_2$  sunt paralele între ele, *semireflectante* și prezintă același coeficient de transmisie ( $T$ ) și de reflexie ( $R$ ). Distanța dintre suprafețe este  $h$ , iar indicele de refracție al mediului dintre acestea este  $n$ . Sistemul este iluminat cu radiație monocromatică de lungime de undă  $\lambda$ . Ochiul observatorului este așezat în focarul obiectivului  $O$ , care îi permite să-și acomodeze ochiul, la fel ca în cazul unei lupe, într-un plan  $AB$  oarecare situat între  $A_1B_1$  și  $A_2B_2$ . Deoarece imaginea sursei se formează pe pupila ochiului, iar planul  $A_1B_1$  este paralel cu  $A_2B_2$ , planul  $AB$  apare uniform iluminat.

1. - Menținând paralelismul dintre planele  $A_1B_1$  și  $A_2B_2$  se variază distanța  $h$  (fig. 108). Să se stabilească legea de variație a iluminării  $E$  a câmpului în funcție de distanța  $h$ . Să se traseze curba ce reprezintă această variație.

R: Diferența de drum între cele două raze transmise succesiv este:

$$\Delta = 2nh \cos i, \text{ iar diferența de fază: } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{4\pi nh \cos i}{\lambda}.$$

Deoarece  $T$  și  $R$  reprezintă coeficienții de transmisie și de reflexie pentru intensitate, aceași coeficienți pentru amplitudine vor fi:  $t = \sqrt{T}$  și  $r = \sqrt{R}$ . În focarul lentilei se vor compune o infinitate de oscilații a căror amplitudine scade în progresie geometrică, iar faza în progresie aritmetică:

$$A = T(1 + Re^{-i\varphi} + \dots + R^n e^{-in\varphi} + \dots) = \frac{T}{1 - Re^{-i\varphi}}, \text{ de unde:}$$

$$I = A^2 = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$$

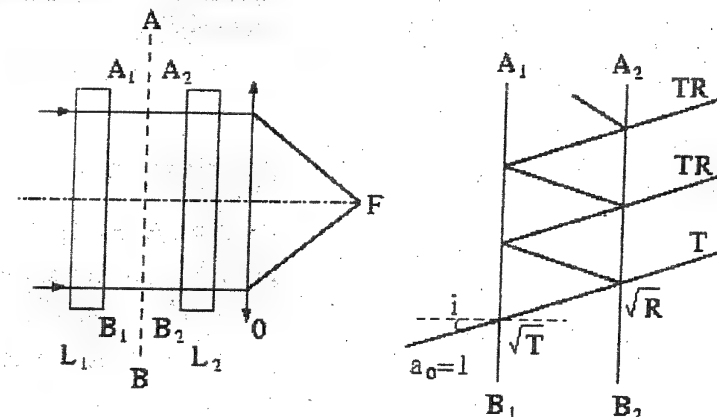


Fig. 108

În acest caz, deoarece incidența este normală, iluminarea maximă a câmpului se obține pentru  $\Delta = 2nh = k\lambda$  sau  $\varphi = 2k\pi$ , deci (fig. 109):

$$E_0 = \frac{T^2}{(1-R)^2} \text{ și } E = E_0 \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$$

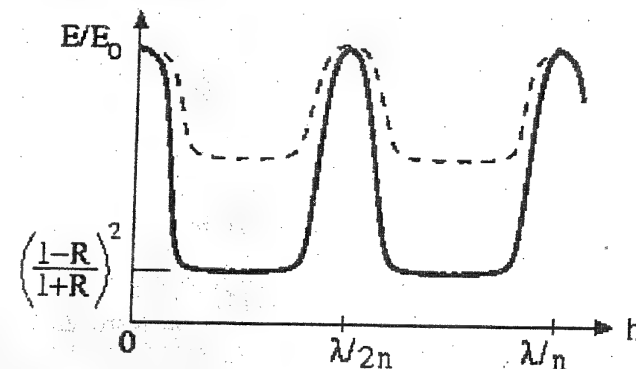


Fig. 109

Cu cât coeficientul de reflexie  $R$  este mai mare cu atât franjele sunt mai fine.

2. - Considerând o valoare fixă a mărimii  $h$ , se introduce un obiect transparent  $M$  caracterizat prin indicele de refracție  $n'$  între lamele  $L_1$  și  $L_2$ . Acesta este o lamă mică și subțire cu fețe plan-paralele de grosime  $h'$ , așezată în așa fel încât fețele ei sunt paralele cu  $A_1 B_1$  și  $A_2 B_2$ . Ochiul observatorului este pus la punct în planul obiectului  $M$ . Să se explice de ce iluminarea  $E'$  în domeniul ocupat de lamă este diferită de cea a câmpului ce o înconjoară (fig. 110).

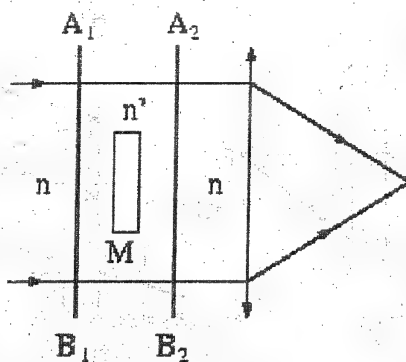


Fig. 110

**R:** Razele ce traversează lama suferă o întârziere suplimentară:

$$\Delta = 2(n' - n)h' \text{ sau } \varphi' = \frac{4\pi(n' - n)h'}{\lambda},$$

deci diferența de fază totală este:  $\Phi = \varphi + \varphi'$ . Această diferență suplimentară de fază face ca iluminarea în domeniul ocupat de lama  $M$ :

$$E' = E_0 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Phi}$$

să fie diferită de iluminarea domeniului înconjurător:

$$E = E_0 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$$

3. - Admițând că valoarea  $\varphi' = \frac{4\pi(n' - n)h'}{\lambda}$  este foarte mică, să se arate că iluminarea  $E'$  are forma  $E' = a + b\varphi'$ , unde  $a$  și  $b$  sunt mărimi constante.

**R:** Considerăm că unghiul  $\varphi$  variază cu  $d\varphi = \varphi'$ , de unde:

$$\cos(\varphi + \varphi') \cong \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi.$$

Prin urmare:

$$E' = E_0 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi + 2R\varphi' \sin \varphi} = E_0 \frac{1}{1 + B\varphi'}, \text{ sau}$$

$$E' \propto E_0(1 - B\varphi') = a + b\varphi', \text{ unde:}$$

$$a = E_0 \text{ și } b = -BE_0 = -\frac{2RE_0 \sin \varphi}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}.$$

4. - Dacă se definește contrastul  $\gamma = \frac{E - E'}{E}$ , să se calculeze în funcție de  $R$ ,  $\varphi$  și  $\varphi'$  contrastul obiectului  $M$  în raport cu câmpul ce-l înconjoară. Se presupune că domeniul  $M$  este mai puțin luminos decât restul câmpului.

**Aplicație.** Considerăm  $R = 0,8$ ,  $h' = 15\mu\text{m}$ ,  $\lambda = 600\text{nm}$ ,  $n = 1,5262$  și  $n' = 1,5260$ , iar valoarea mărimii  $\varphi$  este în așa fel încât  $\sin \varphi = 1$ . Să se stabilească valoare mărimii funcție de  $\varphi'$ ,  $E$  și derivata  $\frac{dE}{d\varphi}$ .

$$\text{R: } \gamma = \frac{E - E'}{E} = B\varphi' = \frac{2R \sin \varphi}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} \varphi'.$$

Pentru  $h' = 15\mu\text{m}$ ,  $\lambda = 600\text{nm}$ ,  $n = 1,5262$  și  $n' = 1,5260$ , se obține:

$$\varphi' = \frac{4\pi h' \Delta n}{\lambda} = 2\pi \cdot 10^{-2}; \sin \varphi = 1 \text{ deci: } \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ și } R = 0,8,$$

deci:  $\gamma = \frac{2\pi}{100}$  ceea ce reprezintă aprox. 6%.

$$\gamma = \frac{E - E'}{E} = \frac{dE}{E} = \frac{1}{E} \frac{dE}{d\varphi} \varphi'.$$

5. - Pe baza curbei  $f(\varphi) = \frac{dE}{E} = \frac{1}{E} \frac{dE}{d\varphi}$  să se determine valoarea mărimii  $\varphi$  pentru care contrastul obiectului  $M$  este maxim. Să se determine valoarea maximă a contrastului funcție de  $R$  și  $\varphi$ , considerând valorile date la punctul 4.



**R:** Pentru o valoare  $\varphi'$  dată, contrastul  $\gamma = \frac{E - E'}{E} = f(\varphi)\varphi' = B\varphi'$

este maxim pentru acea valoare  $\varphi$  pentru care funcția  $f(\varphi) = \frac{1}{E} \frac{dE}{d\varphi} = B$  prezintă un maximum. Să calculăm maximumul funcției:

$$\frac{\gamma}{\varphi'} = \frac{2R \sin \varphi}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} = \frac{2R \sin \varphi}{D},$$

calculând derivata în raport cu  $\varphi$ :

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\gamma}{\varphi'} \right) = \frac{D 2R \cos \varphi - (2R \sin \varphi)(2R \sin \varphi)}{D^2} = 0, \text{ dacă:}$$

$$D \cos \varphi = 2R \sin^2 \varphi, \text{ de unde: } \cos \varphi = \frac{2R}{1 + R^2}.$$

Pentru  $R = 0,8$  se obține:  $\cos \varphi = \frac{1,6}{1,64} \cong 1$ , de unde:

$$\frac{\gamma_M}{\varphi'} = \frac{2R(1 - R^2)}{(1 + R^2) \left[ 1 + R^2 - \frac{2R}{(1 - R^2)} \right]} = \frac{2R}{1 - R^2},$$

iar pentru  $R = 0,8$  se obține:  $\gamma_M = \frac{1,6}{0,36} \cdot 2\pi \cdot 10^{-2} = 0,28$ .

### Lame subțiri antireflectante.

Pe una din fețele unei lame de sticlă a cărei indice de refracție este  $N = 1,50$  este depus un strat de grosime  $h$  de substanță transparentă a cărui indice de refracție este  $n = 1,25$ . Coeficientul de reflexie a celor două fețe ale stratului subțire obținut prin depunere are aceeași valoare. Sistemul se iluminează cu lumină albă sub incidență normală (fig. 111).

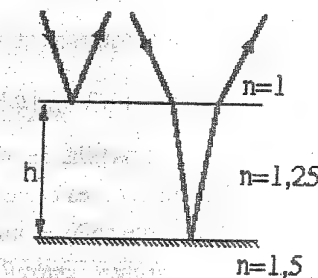


Fig. 111

1. - Să se calculeze grosimile  $h_1, h_2, h_3, \dots$  pentru care radiația galbenă cu  $\lambda = 550 \text{ nm}$  nu este reflectată. Care este structura spectrală a radiației reflectate pentru cea mai mică valoare  $h_1$  a stratului?

R: Sub incidență normală coeficientul de reflexie este dat de relația:

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = r^2. \text{ Reflexia pe suprafața aer/substanță: } r_1 = 0,012, \text{ deci}$$

$$R_1 = \frac{1}{81} = 0,012. \text{ Deci } 1,2\% \text{ din energia incidentă este reflectată de prima}$$

suprafață, iar  $\Delta\phi = \pi$  (se introduce, din cauza reflexiei, o diferență de drum  $\frac{\lambda}{2}$ ).

$$\text{Reflexia pe suprafața substanță/sticlă: } r_2 = \frac{1}{9}, \text{ deci } R_2 = \frac{1}{121} = 0,0083 \text{ adică}$$

0,83% din energia incidentă este reflectată de suprafața a doua, iar  $\Delta\phi = \pi$ . Deoarece foarte puțină energie este reflectată chiar la prima reflexie, nu mai este necesar să considerăm reflexiile multiple.

Interferența a două raze, una reflectată pe prima suprafață cealaltă pe a doua, care au aproape aceeași amplitudine va da un minim, a cărui valoare este aproape egală cu zero, dacă:

$$\Delta = 2nh$$

Radiația cu lungimea de undă  $\lambda_0$  va fi stinsă prin interferență, dacă:

$$\Delta = 2nh = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2} \text{ sau } h = (2k+1)\frac{\lambda_0}{4n} = (2k+1)h_1$$

$$\text{Deci: } h_1 = \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{0,55}{5} = 0,11\mu\text{m} \text{ și, respectiv:}$$

$$h_{1,2,3,4} = (0,11; 0,22; 0,33; 0,44)\mu\text{m}$$

Grosimea  $h_1$  reprezintă prima tentă sensibilă. Se observă că dacă suprafața de sticlă este acoperită cu un strat a cărui grosime este cea calculată mai sus, atunci radiația cu  $\lambda_0$  este reflectată foarte puțin, în schimb este complet transmisă prin lama de sticlă. Asemenea straturi poartă denumirea de *straturi antireflectante*. Sunt utilizate în aparatele optice, la acoperirea lentilelor, pentru a micșora lumina reflectată, prin urmare pentru a crește luminozitatea aparatului.

2. - Să se calculeze, pentru grosimea  $h_3$ , lungimile de undă ale radiațiilor ce nu sunt reflectate și a celor ce sunt cel mai puternic reflectate.

R: Dacă stratul are grosimea  $h_3$ , după cum s-a stabilit mai sus, radiația cu lungime de undă  $\lambda_0$  este aproape complet stinsă în schimb alte lungimi de undă sunt reflectate foarte puternic.  $h = h_3$ , deci:

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2} = p\frac{\lambda_0}{2} = \frac{5}{2}\lambda_0 = 1,375\mu\text{m}$$

Pentru această diferență de drum numărul  $p$  pentru radiația violetă și roșie va fi:

$$\lambda_v = 400\text{ nm}, \quad p_v = \frac{1,375}{0,4} = 3,43$$

$$\lambda_r = 800\text{ nm}, \quad p_r = \frac{1,375}{0,8} = 1,73$$

Radiația  $\lambda_0 = 550\text{ nm}$  va stinsă pentru  $p = 2,5$ , iar pentru  $p = 1,5$  și  $p = 3,5$  vor stinsă radiațiile:

$$\Delta = p\frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = 1,375\mu\text{m}, \quad k = 1, \quad (p = 1,5), \text{ deci:}$$

$$\lambda = \frac{\Delta}{2k+1} = \frac{1,375}{1,5} = 0,9166\mu\text{m} \text{ și } k = 3, \quad (p = 3,5), \quad \lambda = 0,3928\mu\text{m}$$

Pentru  $p = 2k\frac{\lambda}{2} = 2$ , respectiv 3 vor fi reflectate puternic radiațiile cu:

$$\Delta = 2k\frac{\lambda_1}{2}, \text{ deci: } \lambda_1 = \frac{\Delta}{k} = \frac{1,375}{2} = 0,6875\mu\text{m}$$

$$\text{respectiv: } \lambda_2 = \frac{\Delta}{3} = \frac{1,375}{3} = 0,4583\mu\text{m}$$

Se obține următoarea situație:

Reflexie zero	0,9166			0,55			0,3928
k	1			2			3
p	1,5	1,73	2	2,5	3	3,43	3,5
Reflexie intensă			0,6875		0,4583		
Reflexie intermediară		0,8				0,4	

3. - Să considerăm grosimea  $h_5$ . Care este structura spectrală a radiației reflectate? Să se caracterizeze numeric fenomenul observat. Ce se observă dacă se variază unghiul de incidență pe lamă al radiației incidente.

**R:** Să considerăm mai întâi cazul ( $h = h_1$ ). În aceste condiții radiația  $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$  este reflectată cel mai puțin (amplitudinile celor două raze ce interferează sunt aproximativ egale). Diferența de drum optic:

$$\Delta = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{550}{2} = 275 \text{ nm}.$$

Să calculăm intensitatea radiației reflectate de același strat la altă lungime de undă. Deoarece (fig. 112):

$$I = A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \varphi = 2a^2(1 + \cos \varphi) = 4a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$(a_1 \cong a_2 = a),$$

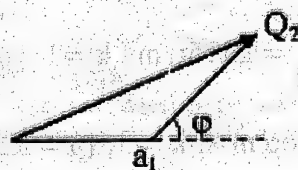


Fig. 112

se obține:  $\frac{I}{I_0} = \cos^2 \frac{2\pi}{2\lambda} \Delta = \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \lambda_0$ , deoarece:  $\Delta = \frac{\lambda_0}{2}$ .

Pentru  $\lambda_V = 400 \text{ nm}$ , se obține:  $\frac{I}{I_0} = \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{550}{400} \cong 0,30$ ,

iar pentru  $\lambda_R = 800 \text{ nm}$ , se obține:  $\frac{I}{I_0} \cong 0,22$ .

Reflexia maximă se obține pentru:  $\Delta = 2nh_1 = 2k \frac{\lambda}{2} = 275 \text{ nm}$

( $k = 1$ ), adică pentru  $\lambda = 275 \text{ nm}$ . În domeniul lungimilor de undă mai mari de  $800 \text{ nm}$ , pentru această grosime a stratului, nu se poate obține o reflexie maximă. Distribuția intensității luminii reflectate este prezentată în fig. 113. Dacă lumina este albă, iar unghiul de incidență este egal cu zero, atunci lumina reflectată de o lamă de sticlă acoperită cu un strat reflectant de grosime  $h_1$ , analizată la spectroscop, prezintă un spectru ce are la  $\lambda = 550 \text{ nm}$  un canal negru, iar spre margini intensitatea crește progresiv.

Să considerăm  $h = h_5$ , deci:  $\Delta = \frac{9}{2} \lambda_0 = 2,475 \mu\text{m}$ .

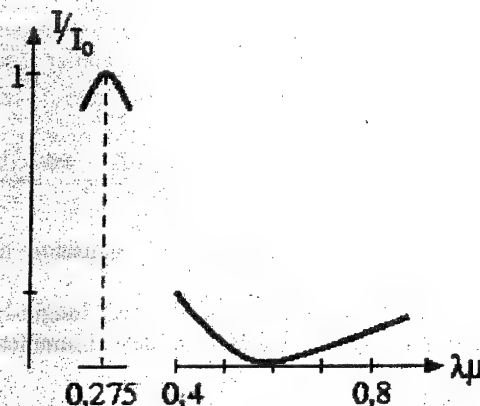


Fig. 113

Pentru  $\lambda_V = 400 \text{ nm}$ , se obține:

$$p_V = \frac{2,475 \mu\text{m}}{0,4 \mu\text{m}} = 6,187 \text{ și } \frac{I}{I_0} = \cos^2 6,187\pi$$

iar pentru  $\lambda_R = 800 \text{ nm}$ , se obține:  $p_R = 3,093$  și

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta = \cos^2 \frac{9\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} = \cos^2 \frac{9\pi}{2} \frac{0,55}{0,8} = \cos^2 3,093\pi.$$

Dacă spectrul radiației cuprinsă între  $\lambda_R$  și  $\lambda_V$ , reflectat de această lamă ( $i \cong 0$ ), este analizat la spectroscop se obține următoarea distribuție a intensității:

Reflexie zero			0,7071		0,55
k			3		4
p		3,093	3,5	4	4,5
Reflexie intensă	0,825			0,6187	
Reflexie intermediară		0,8			

Reflexie zero		0,45			0,3807
k		5			6
p	5	5,5	6	6,187	6,5
Reflexie intensă	0,495		0,4125		
Reflexie intermediară				0,4	

În aceste condiții spectrul prezintă 3 caneluri întunecate (fig. 114). Dacă se variază unghiul de incidență al radiației pe lamă, atunci diferența de drum este  $\Delta = 2nh \cos r$ . Radiațiile pentru care este îndeplinită condiția:

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = 2nh \cos r \quad \text{vor fi stinse, iar cele pentru care:}$$

$$\Delta = 2k\frac{\lambda}{2} = 2nh \cos r \quad \text{vor fi reflectate cu intensitate maximă. Dacă crește}$$

valoarea unghiului  $r$ , atunci valoarea  $\Delta$  scade, deci lungimea de undă a radiației stinse se micșorează. Prin urmare canelurile întunecate și luminoase se deplasează spre ultraviolet.

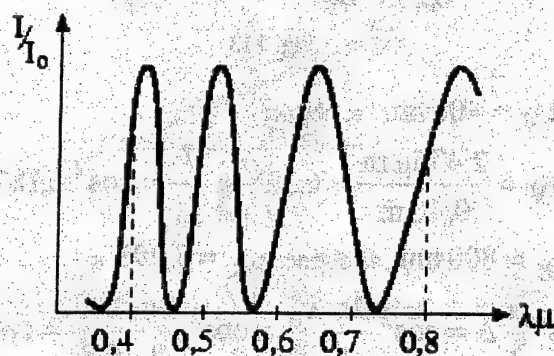


Fig. 114

4. - Cum se vor modifica răspunsurile la problemele precedente dacă indicele de refracție al lamei subțiri ( $n$ ) va fi superior indicelui lamei de sticlă ( $N$ ) (în loc să fie inferior cum s-a presupus mai sus).

R: Atâta timp cât  $n(N, \text{grosimile } h_1, h_2, h_3, \dots \text{ se micșorează când } n \text{ crește. Dacă } n > N, \text{ atunci reflexia pe suprafața lamă/sticlă se face fără schimbare de fază. Prin urmare va avea loc o permutare a canelurilor întunecate cu cele luminoase, adică aspectul spectrului va fi înlocuit cu unul complementar.}$

În ceea ce privește intensitatea fasciculelor reflectate pe prima și a doua suprafață, dacă  $n$  crește apar următoarele modificări:

$$r_1 = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}, \quad \text{cu creșterea lui } n, \text{ crește valoarea } r_1;$$

$$r_2 = \frac{N-n}{N+n}, \quad \text{cu creșterea lui } n, \text{ la început } r_2 \text{ scade, se anulează pentru}$$

( $n = N$ ) și apoi crește.

Deoarece în aparatele optice este necesar ca intensitatea radiației reflectate pe suprafețele optice să fie cât mai mică, valoarea celor doi indici de refracție trebuie să se

afle într-un raport bine determinat pentru ca mărimea intensității celor două fascicule reflectate să fie cât mai apropiată.

### Filtre interferențiale

Un filtru interferențial este constituit dintr-o lamă de substanță transparentă cu indicele de refracție  $n$  și de grosime  $h$ , acoperită pe ambele fețe cu straturi semireflectante. Notăm cu  $R_1$  și  $R_2$  coeficienții de reflexie pentru intensitate a celor două straturi ( $r_1$  și  $r_2$  - coeficienții de reflexie pentru amplitudine) și cu  $T_1$  și  $T_2$  (respectiv  $t_1$  și  $t_2$ ) coeficienții de transmisie.

1. - Care sunt valorile posibile ale mărimii  $h$  pentru ca filtrul să prezinte un maxim de intensitate pentru radiația  $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ , fasciculul de raze paralele fiind normal la suprafață? Care sunt valorile mărimii  $h$  pentru ca filtrul să prezinte o singură bandă de transmisie în domeniul vizibil? Pentru calcule se consideră ( $n = 2,3$ ) și se presupune că la reflexie nu apare nici un defazaj.

**R:** Datorită reflexiilor multiple apar mai multe raze a căror intensitate descrește, iar între razele succesive apare diferența de drum, în cazul incidenței normale:  $\Delta = 2nh$  (fig. 115). Un maxim ale transmisiei apare dacă toate razele transmise sunt în fază adică:  $2nh = k\lambda_0$ , de unde:  $h = kh_0$ , unde:

$$h_0 = \frac{\lambda_0}{2n} = \frac{500}{4,6} = 108,7 \text{ nm}$$

( $h_0 = 108,7 \text{ nm}$  corespunde cazului  $\Delta = k\lambda_0$ ).

Pentru această grosime a lamei transparente, de la o extremitate la alta a spectrului vizibil ( $400 \div 800$ ) nm numărul  $k$  variază între limitele:

$$\frac{500}{400} > k_1 = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda} > \frac{500}{800}$$

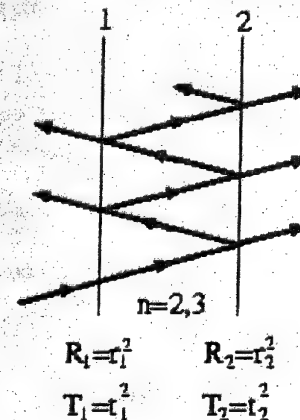


Fig. 115

Dacă considerăm grosimea stratului  $h = 2h_0$ , atunci  $\Delta = 2\lambda_0$ , deci:

$$\frac{10}{4} > k_2 = \frac{2\lambda_0}{\lambda} > \frac{5}{8},$$

iar pentru  $h = 3h_0$ , avem:  $\Delta = 3\lambda_0$ :

$$\frac{1,5}{4} > k_3 > \frac{1,5}{8} \quad (k=3; \lambda = 500 \text{ nm} - \text{maxim de intensitate})$$

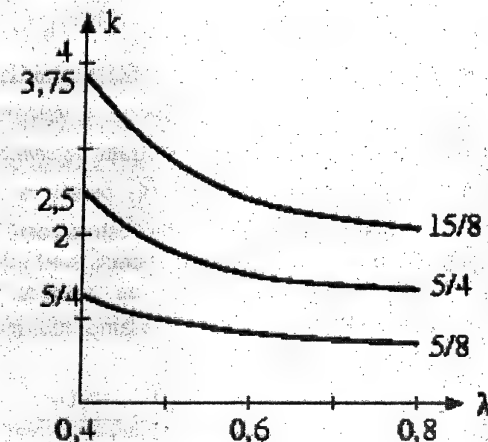


Fig. 116



Această valoare nu îndeplinește condițiile problemei deoarece transmisia mai prezintă un maxim în vizibil și pentru:

$$\Delta = 3\lambda_0 = 2\lambda, \text{ adică: } \lambda = \frac{3\lambda_0}{2} = 750 \text{ nm}.$$

Grosimile convenabile sunt:  $h_0 = 108,7 \text{ nm}$  și  $2h_0 = 217,4 \text{ nm}$ . Reprezentarea grafică a variației lui  $k$  (transmisie maximă) cu lungimea de undă pentru cele trei grosimi are aspectul din fig. 116.

2. - Cum se vor modifica rezultatele problemei precedente dacă reflexiile pe cele două suprafețe introduc întârzieri de fază egale respectiv cu  $\frac{\pi}{10}$ , respectiv  $\frac{\pi}{20}$ .

**R:** Diferența de fază suplimentară va fi:

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{20} = \frac{3\pi}{20} = \frac{2\pi\Delta'}{\lambda},$$

ceea ce corespunde la o diferență de drum optic:  $\Delta' = \frac{3}{40}\lambda$ . În acest caz maximul transmisiei va corespunde la:

$$2nh + \frac{3}{40}\lambda_0 = k\lambda_0, \text{ de unde: } h = \frac{k\lambda_0}{2n} - \frac{3}{80}\frac{\lambda_0}{n}.$$

Deci oricare ar fi valoarea ordinului  $k$ , grosimile sunt micșorate cu:  $\frac{3}{80}\frac{\lambda_0}{n} = 8,1 \text{ nm}$ , adică vor fi:  $100,6 \text{ nm}$ , respectiv  $209,3 \text{ nm}$ . Prin urmare numărul benzilor de transmisie ale filtrului nu se modifică.

3. - Să se calculeze pentru acest filtru valoarea coeficientului de transmisie al intensității  $\tau_0$ , pentru lungimea de undă pentru care acesta are o valoare maximă. Se presupune că nu există pierderi de energie prin absorbție în straturile *semireflectante*. Ce relație trebuie să existe între coeficienții de reflexie  $R_1$  și  $R_2$  pentru ca coeficientul de transmisie maxim să ia valoarea cea mai mare posibilă și care este această valoare.

**R:** Valoarea grosimii este în așa fel aleasă încât razele transmise sunt toate în fază. Să considerăm valoarea amplitudinii razei incidente egală cu unitatea. Toate razele transmise sunt în fază și suprapuse (incidența  $i = 0$ ), deci amplitudinea rezultantă la infinit este egală cu (fig. 117):

$$A = t_1 t_2 [1 + r_1 r_2 + \dots + (r_1 r_2)^n + \dots] = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2}.$$

de unde:

$$\tau_0 = \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2} = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

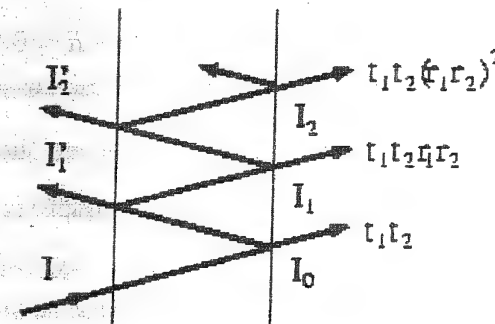


Fig. 117

Dacă nu sunt pierderi de energie în straturile *semireflectante*, atunci:

$$T_1 + R_1 = 1 \text{ și } T_2 + R_2 = 1, \text{ deci:}$$

$$\tau_0 = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{1 - R_1 - R_2 + R_1 R_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}} = 1 - \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Valoarea maximă a coeficientului  $\tau_0$  se obține pentru:

$$R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} = 0, \text{ ceea ce conduce la: } R_1 = R_2, \text{ iar } \tau_0 = 1.$$

Dacă  $\tau_0 = 1$  rezultă că pentru  $\lambda = \lambda_0$  se obține  $R_0 = 0$ , adică nu există fascicul reflectat. Într-adevăr, prima rază reflectată ( $I'_1$ ) are amplitudinea egală cu  $r_1$  și se află în opoziție de fază cu toate celelalte raze a căror amplitudine rezultantă:

$$\frac{t_1 t_2 r_2}{1 - r_1 r_2} \text{ este egală cu } r_1;$$

$$\text{în acest caz: } r_1 = r_2 \text{ și } T = t_1^2 = t_2^2 = 1 - R; \frac{t_1 t_2 r_2}{1 - r_1 r_2} = \frac{(1 - R)r_2}{1 - R} = r_1.$$

4. - Să se calculeze valoarea coeficientului de transmisie  $\tau(\lambda)$  în funcție de lungimea de undă. Pentru simplificare se presupune că cele două straturi *semireflectante* sunt identice, valoarea comună a coeficientului lor de reflexie fiind  $R$ . Să se traseze

curba  $\tau(\lambda)$ . Să se calculeze lăţimea bandei de transmisie a filtrului  $\delta\lambda$  (pentru  $\tau(\lambda) = \frac{\tau_{\max}}{2}$ ). Calculul se va face pentru valorile grosimii  $h$  carora le corespund o singură bandă de transmisie în domeniul vizibil. Se consideră  $R = 0,9$ .

**R:** Defazajul între două raze transmise succesiv este egal cu:  $\varphi = \frac{2\pi(\Delta + \Delta')}{\lambda}$ . Dacă considerăm faza razei cu indice zero drept origine, atunci faza razei cu indice  $n$  are o întârziere egală cu  $n\varphi$ , iar elongaţiile sunt egale cu:

$$\begin{aligned} 0 & t_1 t_2 \cos(\omega t - 0) \\ 1 & t_1 t_2 r_1 r_2 \cos(\omega t - \varphi) \\ \dots & \\ n & t_1 t_2 (r_1 r_2)^n \cos(\omega t - n\varphi). \end{aligned}$$

Utilizând formalismul numerelor complexe se poate obţine expresia elongaţiei rezultante:

$$\begin{aligned} a &= \sum_0^n t_1 t_2 (r_1 r_2)^n e^{i\omega t} e^{-in\varphi} = t_1 t_2 e^{i\omega t} \sum_0^n (r_1 r_2 e^{-i\varphi})^n = \\ &= \frac{t_1 t_2 e^{i\omega t}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\varphi}} = \frac{t_1 t_2 e^{i\omega t}}{1 - r_1 r_2 \cos \varphi + i r_1 r_2 \sin \varphi} \end{aligned}$$

(raţia  $q = r_1 r_2 e^{-i\varphi}$ ).

Considerând pătratul expresiei de mai sus (produsul complex-conjugat) se obţine expresia coeficientului de transmisie:

$$\tau(\lambda) = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 - r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi} = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \varphi}$$

Dacă cele două straturi sunt identice şi neabsorbante ( $R_1 = R_2 = R$  şi  $R + T = 1$ ), atunci:

$$\tau(\lambda) = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \text{ unde: } m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

Pentru cele două grosimi determinate la punctul (1) se obţine:

$$R = 0,9 \text{ deci } m = 360$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta, \text{ pentru: } \Delta = \lambda_0, \text{ se obţine: } \frac{\varphi_1}{2} = \pi \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$\Delta = 2\lambda_0 \quad \frac{\varphi_2}{2} = 2\pi \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

Forma curbelor  $\tau(\lambda)$  este descrisă de funcţiile:

$$\tau_1(\lambda) = \frac{1}{1 + 360 \sin^2 \pi \frac{\lambda_0}{\lambda}} \text{ şi } \tau_2(\lambda) = \frac{1}{1 + 360 \sin^2 \pi \frac{2\lambda_0}{\lambda}},$$

care sunt funcţiile lui Airy. În apropierea maximului ( $\lambda = \lambda_0$ ) panta este foarte mare, iar intensitatea se reduce la jumătate pentru:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{360}, \text{ adică } \frac{\varphi}{2} \cong k\pi \pm \frac{\pi}{60},$$

de unde:

$$\frac{\varphi_1}{2} = \pi \pm \frac{\pi}{60}; \pi \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \pi \pm \frac{\pi}{60}; \lambda_1 = \lambda_0 \left( 1 \mp \frac{1}{60} \right) = (500 \mp 8,3) \text{ nm}.$$

Deci banda de transmisie este cuprinsă între:

$$\lambda_1 = 491,7 \text{ nm şi } \lambda'_1 = 508,3 \text{ nm cu lăţimea } \delta\lambda_1 = 16,8 \text{ nm}.$$

$$\frac{\varphi_2}{2} = 2\pi \pm \frac{\pi}{60}, \frac{\lambda_0}{\lambda_2} = 1 \pm \frac{1}{120}; \lambda_2 = \lambda_0 \left( 1 \mp \frac{1}{120} \right) = (500 \mp 4,2) \text{ nm}.$$

$$\lambda_2 = 495,8 \text{ nm şi } \lambda'_2 = 504,2 \text{ nm, cu lăţimea } \delta\lambda_2 = 8,4 \text{ nm}.$$

(în cel de al doilea caz banda de transmisie - domeniul spectral transmis - se reduce la jumătate).

5. - Cum se modifică lungimea de undă corespunzătoare maximului de transmisie ( $\lambda_i$ ) dacă se utilizează raze sub unghi de incidenţă  $i$  în loc de incidenţă normală? Pentru ce valori ale unghiului de incidenţă ( $i'$ ) lungimea de undă  $\lambda_i$  devine egal cu  $\lambda_1$  sau  $\lambda_2$  (din problema precedentă)? Pe baza acestui rezultat, ce se poate spune despre utilizarea filtrelor interferenţiale în fascicule cu deschidere unghiulară finită? Se va determina valoarea unghiului  $i'$  pentru un filtru realizat dintr-o substanţă transparentă cu  $n = 2,3$  (sulfură de zinc) şi pentru un filtru cu aceeaşi lungime de undă însă realizat dintr-o substanţă cu  $n = 1,3$  (criolit). Ce concluzie se poate trage?

**R:** Pentru incidenţă oblică diferenţa de drum este:  $\Delta = 2nh\cos r$ . Maximul transmisiei apare pentru  $\lambda_i \neq \lambda_0$ , care îndeplineşte condiţia:

$$2nh\cos r = k\lambda_i$$

Deoarece  $2nh = k\lambda_0$ , rezultă că  $\lambda_i = \lambda_0 \cos r$  ( $\lambda_0$  oricare ar fi valoarea  $k$ ). Deci dacă unghiul de incidență  $i$  crește, unghiul  $r$  crește, valoarea  $\lambda$  se micșorează, prin urmare banda de transmisie se deplasează spre lungimi de undă mai mici.

$$\text{Pentru } k = 1, \text{ adică } h = h_0 \text{ se obține: } \lambda_1 = \lambda_2 \left(1 \mp \frac{1}{60}\right)$$

Prin urmare:  $\lambda_i = \lambda_1 = \lambda_0 \left(1 - \frac{1}{60}\right) = \lambda_0 \cos r$  ( $i \neq 0$ ,  $\lambda_i$  se micșorează), deci:

$$\cos r = 1 - \frac{1}{60}; \sin^2 r = \frac{119}{3600} \text{ și } \sin i = n \sin r = \frac{n\sqrt{119}}{60}$$

$$\text{Pentru: } n = 2,3; \sin i = \frac{2,3\sqrt{119}}{60} \approx 0,42; i \approx 24^\circ 36' 30''$$

$$n = 1,3,$$

$$i \approx 13^\circ 36' 50''$$

Pentru  $k = 2$ , adică  $h = 2h_0$  se obține:

$$\lambda_i = \lambda_2 = \lambda_0 \left(1 - \frac{1}{120}\right); \cos r = 1 - \frac{1}{120}; \sin i = \frac{n\sqrt{239}}{120}$$

$$\text{Dacă: } n = 2,3; i \approx 17^\circ 13' 20'', \text{ respectiv } n = 1,3; i \approx 9^\circ 38'$$

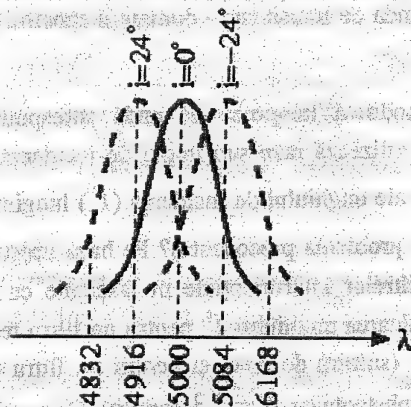


Fig. 118

Deci dacă fasciculul incident prezintă o deschidere unghiulară finită, banda de transmisie a filtrului se lărgeste. În cazul de față ( $k = 1, n = 2,3$ ) lățimea benzii devine egală cu 33,6 nm (fig. 118). Se observă că fenomenul de îrgire a benzii de transmisie pentru fascicule cu deschidere unghiulară finită este cu atât mai mare cu cât indicele de refracție al materialului este mai mare:

$$(n = 1,3 - \text{criolit} - h = h_0; i_i \approx 13^\circ 36' 50'', \text{ iar pentru}$$

$$n = 2,3 - \text{sulfură de zinc} - h = h_0; i_i \approx 24^\circ 36' 30'')$$

6. - Să se studieze comportarea unui filtru care are stratul mijlociu constituit dintr-o lamă cristalină birefringentă a cărei indice de refracție pentru vibrații rectilinii paralele cu liniile neutre ale lamei sunt  $n_x$  și  $n_y$ . În ce condiții două radiații cu lungimile de undă  $\lambda'$  și  $\lambda''$  pot fi transmise simultan cu intensitate maximă și în același ordin de interferență de către acest filtru iluminat cu lumină nepolarizată? Fiind date lungimile de undă precum și substanța birefringentă, totdeauna pot fi îndeplinite condițiile de mai sus?

**R:** Presupunem că reflexia radiației pe suprafața semireflectantă nu modifică starea de polarizare a acesteia. Pentru o oscilație paralelă cu una din direcțiile neutre nu apare nici o modificare în calcule (trebuie să se ia în considerare numai indicele de refracție corespunzător). Dacă lama birefringentă este iluminată cu lumină naturală, la ieșirea din lamă fiecărei radiații îi va corespunde două oscilații reciproc perpendiculare. Direcția de propagare a celor două raze depinde de modul cum este tăiată lama birefringentă față de axul optic. Cele două componente ale aceleiași radiații nu pot fi transmise simultan cu intensitate maximă. Acest lucru este realizabil numai pentru două

$$\text{radiații diferite dacă sunt îndeplinite condițiile: } \lambda' = \frac{2n_x h}{k'} \text{ și } \lambda'' = \frac{2n_y h}{k''}$$

Ca filtrul să transmită simultan cu intensitate maximă și sub același ordin de interferență cele două radiații este necesar:

$$\frac{2h}{k} = \frac{\lambda'}{n_x} = \frac{\lambda''}{n_y} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta n}$$

Această condiție arată că alegerea celor două lungimi de undă este limitată de substanța considerată. Dacă se lucrează cu două lame "încrucișate" de grosimi  $h_1$  și  $h_2$  atunci apar mai multe posibilități care derivă din condițiile:

$$2n_x h_1 + 2n_y h_2 = k\lambda' \text{ și } 2n_y h_1 + 2n_x h_2 = k\lambda''$$

Pentru toate substanțele diferența  $\Delta n = n_x - n_y$  este suficient de mică. De ex.: spat de Islanda  $n_o - n_e = 0,17$ .

### Interferența a două fascicule obținute prin reflexie

#### Oscilații polarizate liniar și eliptic

Pe o suprafață plană, reflectantă, este incident un fascicul de raze paralele de radiație armonică, liniar polarizată. Unghiul de incidență al fasciculului pe suprafață este egal cu  $\alpha$ , iar factorul de reflexie al acestuia este egal cu 1 (în acest caz defazajul introdus prin reflexie este egal cu  $\pi$ ). Să se analizeze două cazuri:

- direcția oscilațiilor este perpendiculară pe planul de incidență;
- direcția oscilațiilor este dispusă în planul de incidență.

1. - Să se calculeze, în punctul M situat la distanță Z de suprafață, diferența de drum optic între două raze, una aparținând fasciculului incident cealaltă fasciculului reflectat, precum și intensitatea energetică în acel punct. Să se analizeze dacă, în ambele cazuri, se poate observa fenomenul de interferență.

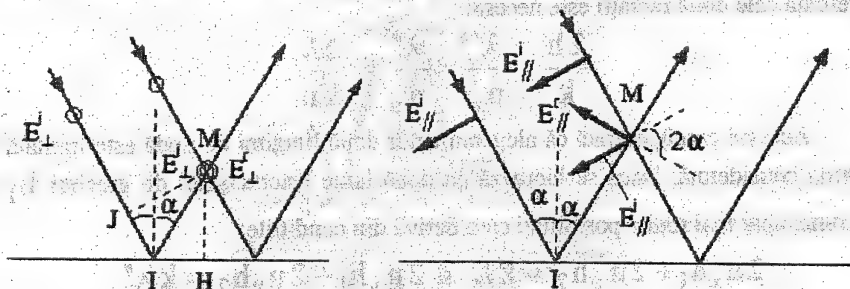


Fig. 119

Fig. 120

R: Considerăm segmentul MJ - perpendicular pe direcția razelor incidente, aparținând frontului de fază constantă (fig. 119). Diferența de drum optic în punctul M este egală cu:

$$\delta = \text{JI} + \text{IM} = \frac{z}{\cos \alpha} + \frac{z}{\cos \alpha} \cos 2\alpha = 2z \cos \alpha$$

a) În punctul M interferează o rază incidentă cu una reflectată. Intensitățile componentelor electrice corespondente  $E_{\perp}^i$  și  $E_{\perp}^r$ , prezentate în fig. 119, sunt coliniare. Intensitatea energetică obținută ca rezultat al interferenței celor două oscilații este:

$$I = 2a^2 [1 + \cos(\varphi + \pi)]$$

unde mărimea  $(\varphi + \pi)$  reprezintă diferența de fază între oscilații, iar:

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi z \cos \alpha}{\lambda}$$

unde s-a considerat că la reflexie se introduce o valoare a defazajului egală cu  $\pi$ . Să se calculeze contrastul figurii de interferență și să se justifice că este egal cu 1.

b) Deoarece la reflexie se introduce un defazaj egal cu  $\pi$ , la incidență normală, dacă  $E^i$  reprezintă intensitatea componentei electrice incidente, după reflexie, intensitatea componentei  $E^r$  prezintă orientarea indicată în fig. 121.

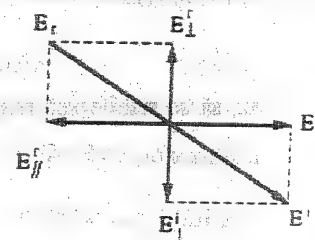


Fig. 121

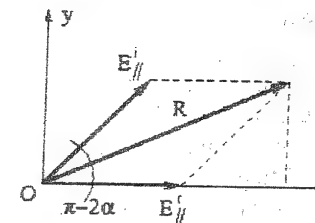


Fig. 122

Dacă valoarea defazajului este egală cu  $\pi$ , iar mărimea unghiului de incidență crește față de normală, oscilațiile  $E_{\parallel}$  care se întâlnesc în punctul M au orientarea indicată în fig. 120. Considerând că razele corespunzătoare celor două oscilații formează între ele unghiul  $2\alpha$ , să calculăm intensitatea determinată de compunerea acestora în punctul M. Dacă se consideră două axe perpendiculare  $Ox$ ,  $Oy$ , unde  $Ox$  coincide cu una din cele două oscilații (fig. 122), se obține:

$$E_{\parallel}^i = a \cos \omega t \text{ și } E_{\parallel}^r = a \cos(\omega t - \varphi)$$

Componentele rezultantei R sunt:



$$x = a \cos(\omega t - \varphi) - a \cos 2\alpha \cos \omega t =$$

$$= a \cos(\omega t - \varphi) + a \cos 2\alpha \cos(\omega t + \pi)$$

$$y = a \sin 2\alpha \cos \omega t,$$

prin urmare intensitatea  $I$  radiantă este dată de:

$$I = a^2 \sin^2 2\alpha + a^2 + a^2 \cos^2 2\alpha + 2a^2 \cos 2\alpha \cos(\varphi + \pi) =$$

$$= 2a^2(1 - \cos 2\alpha \cos \varphi)$$

(Uneori se consideră intensitatea radiantă (energetică) corespunzătoare oscilației polarizate liniar  $x = a \cos(\omega t - \varphi)$  ca fiind egală cu

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T a^2 \cos^2(\omega t - \varphi) dt = a^2. \text{ Deci în cazul unei oscilații polarizate eliptic se}$$

obține:  $I = a^2 + b^2$ )

Intensitatea rezultantei depinde de unghiul de fază  $\varphi$  și de valoarea unghiului  $\alpha$ , iar contrastul tabloului de interferență depinde de unghiul  $\alpha$ :

$$\gamma = \frac{I_M(\varphi = \pi) - I_m(\varphi = 0)}{I_M(\varphi = \pi)} = \frac{2 \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Dacă:  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , atunci:  $\gamma = 0$  (în punctul  $M$ , direcțiile cele două oscilații care interferează sunt reciproc perpendiculare).

2. - Considerând condițiile celei de al doilea caz, să se stabilească relația ce trebuie să existe între mărimile  $Z$  și  $\alpha$  pentru a obține:

a) oscilații polarizate circular;

b) oscilații polarizate liniar.

R: a) oscilații polarizate circular

Dependența de timp a componentelor  $x$  și  $y$  poate fi exprimată sub forma:

$$x = A \cos(\omega t - \phi) \text{ și } y = B \cos \omega t,$$

unde:  $A^2 = a^2 + a^2 \cos^2 2\alpha + 2a^2 \cos 2\alpha \cos(\varphi + \pi)$  și

$$B^2 = a^2 \sin^2 2\alpha,$$

iar:  $\tan \phi = -\frac{\sin \varphi}{\cos 2\alpha - \cos \varphi}$

Pentru ca oscilația rezultantă să fie polarizată-circular, este necesar:

$$A^2 = B^2 \text{ și } \phi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ sau}$$

$$a^2 + a^2 \cos^2 2\alpha - 2a^2 \cos 2\alpha \cos \varphi = a^2 \sin^2 2\alpha,$$

de unde:  $\cos 2\alpha(\cos 2\alpha - \cos \varphi) = 0.$

Această ecuație este satisfăcută de două soluții.

Prima soluție:  $\cos 2\alpha = 0$ , de unde:  $2\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ .

Singura soluție posibilă este:  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . În acest caz:

$$x = a \cos[\omega t - (\varphi + \pi)] \text{ și } y = a \cos \omega t.$$

Amplitudinile maxime sunt egale și trebuie îndeplinită condiția:

$$\varphi + \pi = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

de unde:

$$z = \frac{\lambda}{8 \cos \alpha} (2k-1) \text{ sau } z = \frac{\lambda}{4\sqrt{2}} (2k-1).$$

A doua soluție a ecuației este:  $\cos 2\alpha - \cos \varphi = 0$ , care conduce la:  $\tan \phi = \infty$ , care reprezintă o valoare convenabilă a mărimii  $\phi$ . Rezultă:

$$\cos \varphi = \cos 2\alpha, \text{ de unde: } \varphi = \pm 2\alpha + 2k\pi.$$

Prin urmare:  $z = \pm \frac{\alpha \lambda}{2\pi \cos \alpha} + \frac{k \lambda}{2 \cos \alpha}$

b) Oscilații polarizate liniar.

În acest caz:  $\tan \phi = -\frac{\sin \varphi}{\cos 2\alpha - \cos \varphi} = 0$ , deci:  $\sin \varphi = 0$ , adică:

$\varphi = k\pi$ , de unde:

$$z = \frac{k \lambda}{4 \cos \alpha}.$$



### Interferența fasciculelor obținute prin reflexie pe fețele unei prisme

O prismă  $ABC$ , confecționată din sticlă caracterizată prin indicele de refracție  $n$ , este iluminată cu un fascicul de raze paralele de radiație armonică cu lungimea de undă  $\lambda$  (fig. 123). Unghiul de incidență al fascicului pe fața  $AB$  este egal cu  $\alpha$ , iar  $\beta$  reprezintă valoarea unghiului  $A$  al prisme. Se observă sistemul de franje determinat de interferența fasciculelor obținute prin reflexie pe fețele  $AB$  și  $AC$  ale prisme.

1. - Să se calculeze, într-un punct  $M$  dispus pe fața  $AB$ , diferența de fază  $\delta$  funcție de mărimile  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $n$  și  $x$ , unde  $x$  caracterizează poziția punctului  $M$  ( $x = AM$ ).

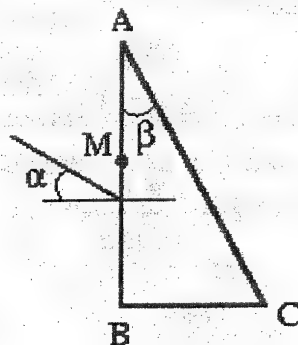


Fig. 123

$R$ : Razei incidente  $R$  îi corespund două raze reflectate  $R_1$  și  $R_2$  (fig. 124); fasciculelor reflectate, cărora le aparțin razele  $R_1$  și  $R_2$ , le corespund suprafețele de undă  $(P_1)$  și  $(P_2)$ , care se intersectează în vârful  $A$  al prisme unde oscilațiile sunt în fază. În punctul  $M$  al feței  $AB$  interferează oscilațiile care corespund razelor  $MH_1$  și  $MH_2$ , perpendiculare pe fronturile de fază (undă) plane  $(P_1)$  și  $(P_2)$ . Considerând reflexia dintr-un mediu mai puțin refringent pe un mediu mai refringent, diferența de fază în punctul  $M$  este:

$$\delta = MH_2 - MH_1 + \frac{\lambda}{2}.$$

Segmentul  $MH_2$  este paralel cu raza  $R_2$ , care formează cu normala la fața  $AB$  unghiul  $i$ , deci:

$$\sin i = n \sin(r + 2\beta),$$

unde  $r$  reprezintă unghiul de refracție corespunzător unghiului de incidență  $\alpha$ .

Unghiul  $MAH_2$  este egal cu  $i$ , prin urmare:

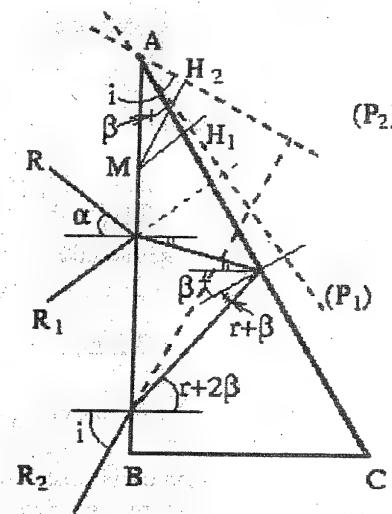


Fig. 124

$$MH_2 = x \sin i = n x \sin(r + 2\beta).$$

Segmentul  $MH_1$  este paralel cu  $R_1$ , unghiul  $MAH_1$  este egal cu  $\alpha$  și  $MH_1 = x \sin \alpha$ , de unde:

$$\delta = n x \sin(r + 2\beta) - x \sin \alpha + \frac{\lambda}{2},$$

relație ce poate fi scrisă sub forma:

$$\delta = x \sin \alpha (\cos 2\beta - 1) + n x \sin 2\beta \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} + \frac{\lambda}{2}.$$

2. - Să se stabilească expresia mărimii  $\delta$  în cazul unor valori mici ale unghiului  $\beta$ . Să se calculeze valoarea interfranței tabloului de interferență care apare pe fața AB a prismei considerând că  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 3'$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$  și  $n = 1,5$ . Să se explice de ce observarea sistemului de franje de interferență este mai comodă prin reflexie decât prin transmisie?

R: Considerând valoarea unghiului de incidență  $\alpha \neq 0$ , dacă valoarea unghiului  $\beta$  este mică atunci:

$$\delta \cong 2n x \beta \cos r + \frac{\lambda}{2} = 2ne \cos r + \frac{\lambda}{2},$$

unde:  $e \cong x \beta$  reprezintă grosimea prisme în punctul M.

Interfranța  $\Delta x = i$  este dată de relația:

$$\delta \cong 2n \Delta x \beta \cos r = \lambda, \text{ de unde:}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2n \beta \cos r}.$$

$$\text{Dacă } \alpha = 0, \text{ atunci } r = 0, \text{ deci: } \Delta x = \frac{\lambda}{2n \beta} = 0,19 \text{ mm}.$$

În cazul fascicului transmis, valorile amplitudinilor oscilațiilor care interferează sunt foarte diferite:

$$E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i = 0,2 E_i,$$

și ca rezultat vizibilitatea tabloului de interferență este redusă.

3. - Menținând condițiile experienței din cazul precedent, se mărește valoarea lățimii sursei de radiație optică. Dacă valoarea maximă a mărimii  $x$  este  $x = 50 \text{ mm}$ , să se stabilească valoarea dimensiunii unghiulare a sursei ce poate fi acceptată. Se consideră că pentru o variație  $\delta \leq \frac{\lambda}{4}$ , contrastul tabloului de interferență este încă acceptabil. Să se construiască suprafața de localizare a franjelor.

R: Dacă variația diferenței de drum optic  $\delta$  funcție de unghiul de incidență  $i$  trebuie să fie inferioară valorii  $\frac{\lambda}{4}$ , atunci pentru valoarea maximă a mărimii  $e$  se obține:

$$\alpha = 0, \quad \delta = 2n x \beta = \lambda$$

$$\alpha = i \neq 0, \quad \delta - \Delta\delta = 2n x \beta \cos r = \lambda - \frac{\lambda}{4},$$

$$\text{de unde:} \quad \Delta\delta = 2ne(1 - \cos r) \leq \frac{\lambda}{4}.$$

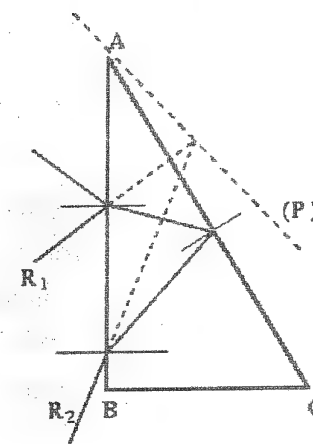


Fig. 125

Această relație poate fi transformată sub forma:

$$2ne(1 - \cos r) = 2ne \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} \right) \cong$$

$$\cong 2ne \left[ 1 - \left( 1 - \frac{i^2}{2n^2} \right) \right] = 2ne \frac{i^2}{2n^2} \leq \frac{\lambda}{4}$$

$$\text{de unde:} \quad i \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n\lambda}{e}}.$$

Deci este permisă lățimea unghiulară a sursei care, pe suprafața AB a prisme, determină o variație a unghiului de incidență care satisface condiția de mai sus.

Franjele sunt localizate în planul (P) perpendicular pe planul figurii a cărui urmă trece prin punctul de întâlnire a razelor reflectate  $R_1$  și  $R_2$  (care corespund aceleiași raze incidente R) și prin vârful A al prisme (fig. 125).

Aplicație numerică:  $e = x\beta = 44 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ , de unde:  $i \leq 0,064 \text{ rad}$ .

### Interferometrul Michelson. Spectrul canelat

Un interferometru Michelson este iluminat de sursa punctiformă S (fig. 126). Oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  sunt dispuse fiecare la distanța D de punctul I, punct de întâlnire cu lama divizoare de fascicul G a unei raze care provine din S și este normală pe oglinda  $M_1$ . Sursa S este de asemenea situată la distanța D de punctul I. Oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  sunt perpendiculare între ele și dispuse la  $45^\circ$  față de lama G. Aplicăm oglinzilor  $M_1$  și  $M_2$  o rotație mică de unghi  $\alpha$  (fig. 127), în același sens, în jurul axelor perpendiculare pe planul fig. 127, care trec prin punctele  $O_1$  și  $O_2$ . În problemă nu se vor considera efectele determinate de reflexia pe lama divizoare G sau de transmisia acesteia.

1. – a) Să se stabilească poziția imaginilor virtuale  $S_1$  și  $S_2$  ale sursei S, corespunzătoare fasciculele emergente formate prin divizare și reflexii pe oglinzi. Aceste imagini sunt formate prin reflexii pe elementele optice G,  $M_1$  și  $M_2$ . Se va folosi imaginea  $M'_1$  a oglinzii  $M_1$  formată față de lama divizoare de fascicul G. Să se realizeze o schemă explicativă.

R: Imaginile  $S_1$  și  $S_2$  ale sursei S, formate de oglinda  $M_1$ , respectiv  $M_2$  (fig. 128), sunt simetrice față de axa  $IO_2$ , deci  $O_2S_1 = O_2S_2 = 2D$ .

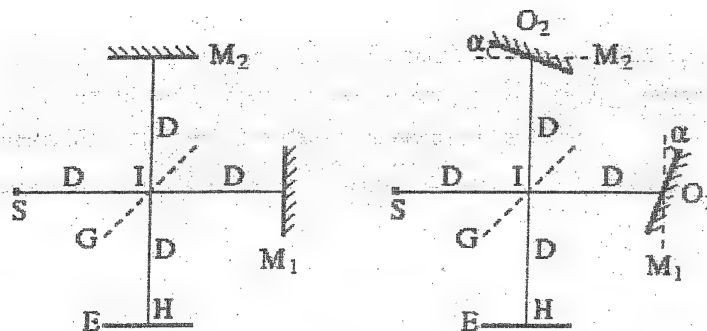


Fig. 126

Fig. 127

1. - b) Să se calculeze distanța dintre imaginile  $S_1$  și  $S_2$  și distanța de la segmentul  $S_1S_2$  la ecranul E, situat la distanța D de punctul I, funcție de mărimile D și  $\alpha$ . Să se calculeze valorile corespunzătoare considerând  $D = 1\text{ m}$  și  $\alpha = 1^\circ$ .

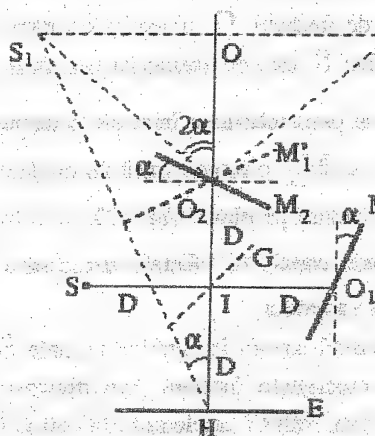


Fig. 128

R: Unghiul  $\angle IHS_1 = \alpha$ , iar punctele  $S_1$ ,  $S_2$  și H sunt dispuse pe același cerc, deci:  $\angle OO_2S_1 = 2\alpha$  și:

$$S_1S_2 = 4D \sin 2\alpha.$$

Dar  $OO_2 = 2D \cos 2\alpha$ , deci:

$$OH = 2D(1 + \cos 2\alpha).$$

Aplicație numerică:

$$\sin 2\alpha = 0,035, \text{ prin urmare: } S_1S_2 = 0,14\text{ m și } OH = 4\text{ m}.$$

2. - Să presupunem că sursa S emite radiația monocromatică  $\lambda = 500\text{ nm}$ . Se observă franjele de interferență pe ecranul E. Să se stabilească expresia interfranței funcție de mărimea  $\alpha$  și să se calculeze valoarea numerică.

R: Expresia interfranței este:

$$i = \frac{\lambda OH}{S_1S_2} = \frac{\lambda(1 + \cos 2\alpha)}{2 \sin 2\alpha} \approx \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} = 14,28 \mu\text{ m}.$$

3. - Între lama "divizor de fascicul" G și oglinzile  $M_1$ , respectiv  $M_2$  (fig. 129), se introduc polarizatorii  $P_1$ , respectiv  $P_2$ , (a căror grosime este neglijabilă), iar "direcțiile de transmisie maximă" pot fi paralele sau în cruce.

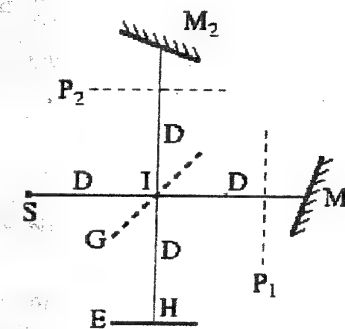


Fig. 129

a) Să se descrie tabloul de interferență observat pe ecranul E dacă direcțiile  $P_1$ , respectiv  $P_2$  sunt paralele, respectiv perpendiculare.

R: Dacă direcțiile  $P_1$  și  $P_2$  sunt paralele atunci se observă franjele de interferență; dacă acestea sunt în cruce, direcțiile de acțiune a componentelor electrice ale câmpurilor *em* care interferează sunt perpendiculare și incoerente, prin urmare nu se poate observa fenomenul de interferență.

b) Să considerăm că razele de radiație optică emergente din sursa S traversează un polarizator P plasat între punctele S și I (nereprezentat pe figură). Polarizorii  $P_1$  și  $P_2$  sunt dispuși "în cruce", iar oscilațiile transmise de către aceștia sunt orientate la  $45^\circ$  față de cele transmise de P. Să se descrie tabloul observat și să

se justifice formarea acestuia. Cum trebuie completat montajul dacă dorim să observăm tabloul de interferență.

**R:** În acest caz, oscilațiile transmise de polarizorii  $P_1$  și  $P_2$  sunt reciproc perpendiculare, coerente și de amplitudine egală, filtrul de polarizare  $P$  fiind orientat la  $45^\circ$  față de  $P_1$  și  $P_2$ . Aceste oscilații reciproc perpendiculare, deși prezintă între ele un defazaj  $\varphi$ , variabil, conduc la o iluminare uniformă a tabloului de interferență.

Radiația optică este polarizată eliptic, axele elipsei fiind orientate la  $45^\circ$  față de direcțiile filtrelor  $P_1$  și  $P_2$ . Pentru a obține un tablou de interferență cu cel mai bun contrast, după  $P_1$  și  $P_2$ , trebuie plasat un analizor, a cărui direcție de oscilație este paralelă cu cea a filtrului  $P$ .

4. - Ambele oscilații transmise de filtrele de polarizare  $P_1$  și  $P_2$  sunt perpendiculare pe planul figurii, dar cele transmise de filtrul  $P_1$  formează un unghi  $\theta$  cu precedentele. Să se analizeze variația iluminării pe ecranul  $E$ . Analiza se va efectua calculând vizibilitatea:

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}}$$

în funcție de unghiul  $\theta$ . Să se reprezinte grafic dependența contrastului  $\gamma$  de variația unghiului  $\theta$ .

**R:** Polarizatorul  $P$  asigură coerența oscilațiilor. Direcția oscilațiilor care interferează la nivelul ecranului formează între ele un unghi  $\theta$ . Componentele pe axele perpendiculare  $Ox$ ,  $Oy$  (fig. 130) ale rezultantei  $R$  sunt:

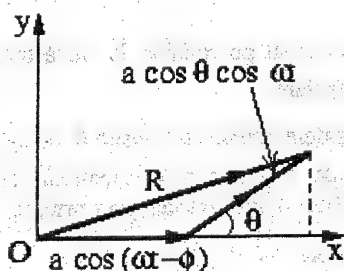


Fig. 130

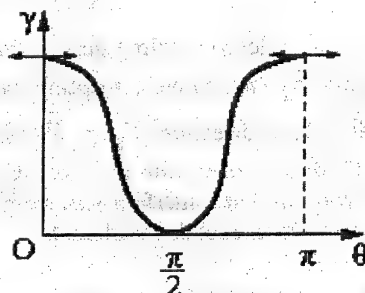


Fig. 131

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) + a \cos^2 \theta \cos \omega t = A \cos(\omega t - \Phi)$$

$$y = a \cos \theta \sin \theta \cos \omega t = B \cos \omega t$$

Mărimea  $A^2$  se poate calcula folosind construcția Fresnel:

$$A^2 = a^2 + a^2 \cos^4 \theta + 2a^2 \cos^2 \theta \cos \varphi$$

$$B^2 = a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$I = A^2 + B^2 = a^2 (1 + \cos^2 \theta + 2a^2 \cos^2 \theta \cos \varphi)$$

$$I_{\max} = a^2 (1 + 3 \cos^2 \theta), \quad I_{\min} = a^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\gamma = \frac{4 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

Dependența valorii contrastului tabloului de interferență  $\gamma$  de variația unghiului de defazaj  $\theta$  este prezentată în fig. 131.

5. - Cei trei polarizatori fiind eliminați, presupunem  $\alpha = 0$ , iar distanța de la punctul  $I$  la oglinda  $M_2$  este egală cu  $D + d$ . Să se calculeze raza inelelor de interferență obținute pe ecranul  $E$ . Considerând radiație armonică ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ) și  $d = 0,1 \text{ mm}$ , să se calculeze raza primului inel luminos.

**R:** Sursa fiind punctiformă se observă inelele nelocalizate. În acest caz imaginile  $S_1$  și  $S_2$  sunt aliniate pe axa  $IH$  și separate prin distanța  $2d$ . Această distanță fiind mică se poate scrie (fig. 132):

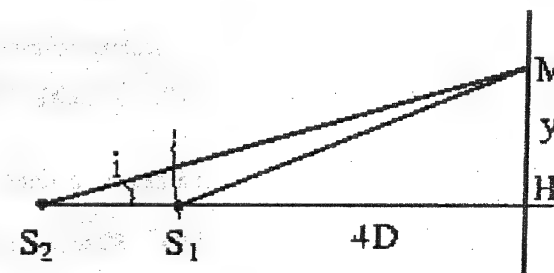


Fig. 132

$$\delta \cong 2d \cos i \cong 2d - di^2$$

În centrul tabloului de interferență se poate scrie relația:

$$\frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda} = k_0,$$

iar în punctul  $M$ :

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda} - \frac{di^2}{\lambda} = k,$$



de unde:  $k_0 - k = \frac{di^2}{\lambda}$ ,

prin urmare:  $i = \sqrt{\frac{\lambda}{d}(k_0 - k)}$ .

Raza inelului de ordin  $k$  este:

$$y = 4D \sqrt{\frac{\lambda}{d} \sqrt{(k_0 - k)}}$$

Aplicație numerică:  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $d = 0,1 \text{ mm}$ , deci:  $k_0 = 400$ ; ordinul primului inel luminos este:  $k = 399$ , de unde:

$$y = 4D \sqrt{\frac{\lambda}{d}} = 28 \text{ cm}.$$

6. - Se consideră montajul din cazul precedent, dar sursa emite radiație optică albă și  $d = D$ . Să se descrie aspectul câmpului de interferență.

În planul ecranului  $E$  (acesta fiind înlăturat) se plasează fanta de intrare a unui spectograf cu dispersie normală (proporțională cu lungimea de undă) astfel încât centrul său să coincidă cu axa sistemului, adică cu punctul  $H$ . Considerând două axe:  $Oy$  paralelă cu fanta și  $Ox$  perpendiculară pe fantă, să se stabilească ecuația canelurilor întunecate.

Lungimea fantei fiind egală cu  $2 \text{ cm}$ , să se calculeze numărul de caneluri negre care apar în spectrul limitat de lungimile de undă  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  și  $\lambda_2 = 800 \text{ nm}$ . Să se indice grafic poziția lor în spectru.

Se consideră că sursa  $S$  nu mai emite lumină albă ci o singură radiație cu  $\lambda = 500 \text{ nm}$  a cărei coeficient de finețe este  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10^4$ . Să se stabilească valoarea

maximă a mărimii  $d$  pentru care este posibil să se observe franje în centrul tabloului de interferență.

**R:** Diferența de drum este foarte mare, iar sursa emite lumină albă; iluminarea rămâne uniform albă dar este un "alb de ordin superior", pentru că lumina, din cauza interferenței, comportă un mare număr de radiații stinse. Pe de altă parte, distanța  $d$  fiind importantă, calculul aproximativ al diferenței de drum în punctul  $M$  trebuie făcut mai cu grijă. Distanța  $S_1S_2$  este egală cu  $2D$  (fig. 133).

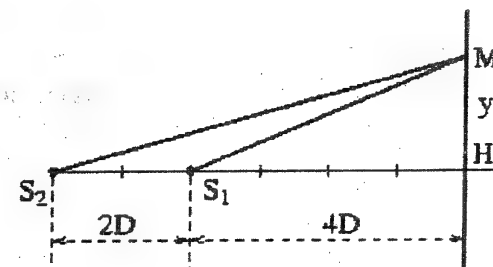


Fig. 133

$$\delta_M = \sqrt{y^2 + HS_2^2} - \sqrt{y^2 + HS_1^2} = \sqrt{y^2 + 36D^2} - \sqrt{y^2 + 16D^2}$$

$$\delta_M \approx 6D \left[ 1 + \frac{y^2}{2 \cdot 36D^2} \right] - 4D \left[ 1 + \frac{y^2}{2 \cdot 16D^2} \right] = 2D - \frac{y^2}{24D}$$

Iluminarea este egală cu zero dacă  $\frac{\delta}{\lambda} = k + \frac{1}{2}$ , adică:

$$\frac{2D}{\lambda} - \frac{y^2}{24D\lambda} = k + \frac{1}{2},$$

de unde se obține o relație între  $y$  și  $\lambda$ :

$$y^2 = 48D^2 - 12\lambda D(2k+1).$$

Considerând raportul de proporționalitate a mărimii  $x$  în raport cu  $\lambda$  egal cu 1, se obțin curbe care formează o rețea de caneluri în spectru; acestea sunt parabole:

$$y^2 = 48D^2 - 12Dx(2k+1).$$

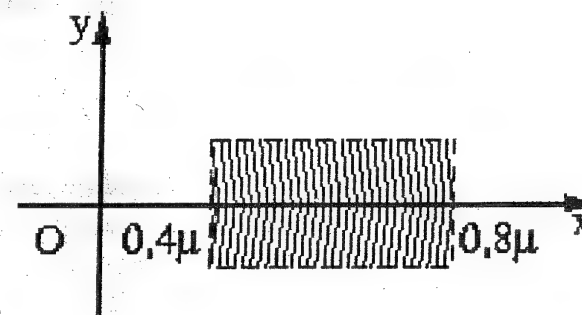


Fig. 134

Numărul de caneluri negre.

În centrul câmpului de interferență:  $y = 0$ , sau deoarece  $x = \lambda$ , pentru  $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 800 \text{ nm}$  valorile ordinului  $k$  trebuie să verifice relația:

$$48 D^2 - 12 \lambda D (2k+1) = 0,$$

adică:

$$\frac{2D}{\lambda} = k + \frac{1}{2},$$

unde mărimea  $\frac{2D}{\lambda}$  reprezintă ordinul de interferență în centru.

Punctele pentru care  $y = 0$  reprezintă punctele de intersecție ale parabolilor cu axa  $Ox$ . Numărul lor  $N$  este dat de

$$N = \frac{2D}{0,4} - \frac{2D}{0,8} = 2,5 \cdot 10^6$$

Valoarea este foarte mare deoarece diferența de drum este egală cu  $2 \text{ m}$ .

Să analizăm prima parabolă  $\lambda < 800 \text{ nm}$ . Abscisa  $x$  a punctului ei de intersecție cu axa  $Ox$  este dată de:

$$\frac{2D}{x} = 2,5 \cdot 10^6 + 0,5 \approx 2,5 \cdot 10^6 \text{ de unde: } x \approx 800 \text{ nm}.$$

Pe de altă parte, parabolele trec toate prin punctul:  $x = 0$ ,  $y = \pm 6,9 \text{ m}$ . Deci parabolele, foarte strânse, întorc concavitățile lor foarte puțin accentuată spre  $x < 0$  și sunt limitate de dimensiunea fantei (fig. 134).

### Interferometrul Michelson. Condiția de compensare

Un interferometru Michelson (fig. 135) este reglat pentru a observa inelele de interferență la infinit. Sursa  $S$  plasată în focalul obiectivului  $O$  reprezintă o sursă cu distribuție uniformă și monocromatică ( $\lambda$ ). Presupunem că divizorul de fascicul  $G$  nu introduce nici o diferență de fază între cele două fascicule ale interferometrului. Se notează cu  $\Omega$  punctul de întâlnire al axelor aparatului, iar  $D_1$  și  $D_2$  reprezintă distanțele de la  $\Omega$  la oglinzile  $M_1$ , respectiv  $M_2$ . O lamă de sticlă cu fețele plan-paralele, de grosime  $e$  și de indice de refracție  $n$ , este plasată în fața oglinzii  $M_2$ .

I. - Să se calculeze diferența de drum dintre razele reflectate de oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  în următoarele cazuri:

- a) -  $\alpha$ )  $D_2 - D_1 \geq e$ ;  $\beta$ )  $D_2 - D_1 < e$ , unde:  $D_2 > D_1$ ;
- b) -  $D_2 = D_1$ ;
- c) -  $D_2 < D_1$ .

Din această analiză să se deducă o relație generală valabilă în toate cazurile.

R: a) -  $\alpha$ ) Pentru a calcula diferența de drum  $\delta_{3-1}$ , se consideră traseul intermediar 2 corespunzând unei reflexii (în fapt neglijabilă) pe fața lamei de sticlă.

Deci:  $\delta_{1-2} = 2(D_2 - D_1 - e) \cos i$  și  $\delta_{2-3} = 2n e \cos r$ ,

prin urmare:  $\delta_{1-3} = 2(D_2 - D_1 - e) \cos i + 2n e \cos r$

Dacă:  $D_2 - D_1 = e$ , atunci:

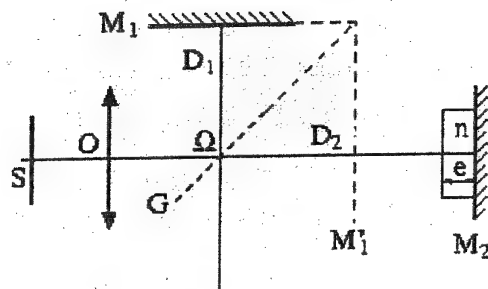


Fig. 135

$$\delta_{1-3} = 2ne \cos r$$

În acest caz, din fig. 136 rezultă că imaginea  $M_1'$  coincide cu fața a doua a lamei de sticlă.

a) -  $\beta$ ) Dacă intervine traseul intermediar 2 (fig. 137) se obține:

$$\delta_{2-3} = 2ne \cos r, \quad \delta_{2-1} = 2[e - (D_2 - D_1)] \cos i$$

Prin urmare:  $\delta_{3-1} = 2[e - (D_2 - D_1)] \cos i - 2ne \cos r,$

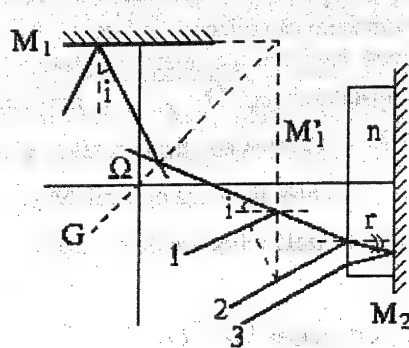


Fig. 136

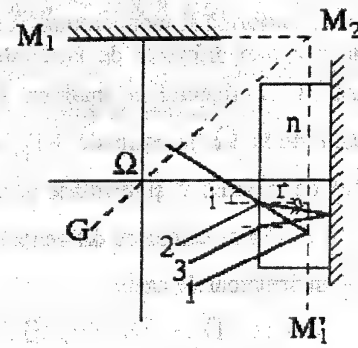


Fig. 137

deci:  $\delta_{1-3} = 2[D_2 - D_1 - e] \cos i + 2ne \cos r,$

adică se obține relația din cazul precedent, dar mărimea  $D_2 - D_1 - e$  este negativă.

b).  $D_2 = D_1$  (fig. 138).

Trebuie stabilită relația care reprezintă diferența de drum între o rază care traversează o lamă de grosime  $2e$  și o alta care este paralelă cu prima dar nu traversează lama. Se obține:

$$\delta_{1-2} = -2e \cos i, \quad \delta_{3-2} = -2e \cos r,$$

de unde:

$$\delta_{1-3} = -2e(\cos i - n \cos r),$$

expresie care se regăsește dacă, în relațiile precedente, se consideră  $D_2 = D_1$ .

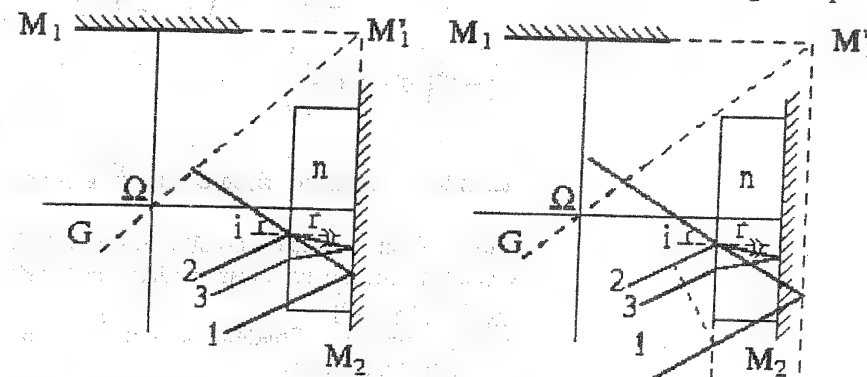


Fig. 138

Fig. 139

c).  $D_2 < D_1$  (fig. 139)

$$\delta_{1-2} = -2[e + D_1 - D_2] \cos i, \quad \delta_{1-3} = -2ne \cos r$$

de unde:

$$\delta_{1-3} = +2[D_2 - D_1 - e] \cos i + 2ne \cos r$$

Rezultă relația:

$$\delta = 2(e' - e) \cos i + 2ne \cos r,$$

unde:  $e' = D_2 - D_1 > 0$ , dacă  $D_2 > D_1$  sau  $e' = D_2 - D_1 < 0$ , dacă:  $D_2 < D_1$ ,  $D_2$  fiind exact distanța relativă la oglinda pe care s-a plasat lama de sticlă.

2. - Să se arate că numai în cazul a) se poate alege o valoare  $D_2 - D_1 = e'$  astfel încât, la infinit, inelele să fie înlocuite cu o culoare uniformă. Să se calculeze valoarea corespunzătoare a diferenței de fază  $\phi$ . Să se stabilească legătura dintre mărimile  $e$  și  $e'$ , dacă  $n = 1,5$ .

R: Expresia diferenței de drum  $\delta$  se poate dezvolta în serie funcție de unghiul de incidență  $i$ , cu limitare la termenii de ordinul al doilea:

$$\delta = 2(e' - e) \cos i + 2n \cos r = 2(e' - e) \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) + 2ne \left(1 - \frac{i^2}{2n^2}\right) =$$

$$= 2(e' - e + ne) - i^2 \left(e' - e + \frac{e}{n}\right)$$

Prin urmare dacă  $e' = e \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ , termenul în  $i^2$  se anulează; în acest caz diferența de drum variază foarte puțin cu unghiul de incidență, termenul următor al dezvoltării fiind de ordinul patru; deci se observă o tentă aproape uniformă a cărei intensitate corespunde diferenței de fază  $\varphi = \frac{4\pi[e' + e(n-1)]}{\lambda}$ . Condiția  $e' = e \frac{n-1}{n}$  nu poate fi realizată decât în cazul a) ( $D_2 > D_1$ ) în care sigur  $e' > 0$ . Lama de sticlă trebuie plasată pe oglinda căreia îi corespunde cel mai lung traseu. Dacă  $n = 1,5$  se găsește relația:

$$e' = \frac{e}{3}$$

### Interferometrul Michelson.

Inele formate la infinit și observate în prezența unei lame de sticlă

Să considerăm interferometrul Michelson prezentat în fig. 140. Sursa S este punctiformă și emite radiație monocromatică; oglinzile  $M_1$  și  $M_2$  sunt perpendiculare între ele și dispuse la  $45^\circ$  față de lama G divizoare de fascicul; distanțele fiecăreia la punctul de întâlnire I al axelor interferometrului sunt  $D_1$ , respectiv  $D_2$ . Nu se vor considera efectele determinate de reflexia pe divizorul G și transmisia acestuia.

1. - Să se descrie și să se calculeze aspectul fenomenelor observate în planul focal F al lentilei L de distanță focală f (fig. 141) în următoarele cazuri:

a)  $D_1 = D_2$ ;

R: Deoarece  $D_1 = D_2$ , în planul focal al lentilei se obține o iluminare uniformă de intensitate maximă.

b)  $D_1 \neq D_2$ .

R: Dacă  $D_1 \neq D_2$ , lama "virtuală" cu fețe paralele care se formează între oglinda  $M_1$  și imaginea  $M'_2$  a oglinzii  $M_2$  față de divizorul G, are grosimea:

$$e = |D_1 - D_2|.$$

Sursa fiind punctiformă, la infinit se formează inele nelocalizate. În planul focal al lentilei L (fig. 142) se observă inelele formate la infinit; în punctul M, care corespunde fasciculului de incidență  $i$  pe lama de aer echivalentă, se obține:

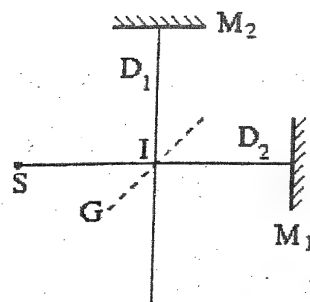


Fig. 140

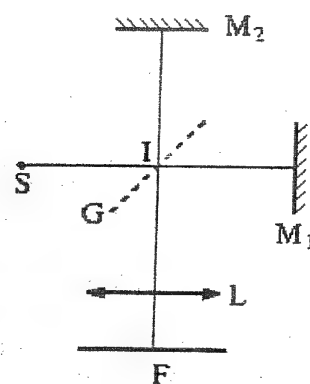


Fig. 141

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e \cos i}{\lambda} = k,$$

iar pentru unghiul de incidență egal cu zero:

$$\frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} = k_0.$$

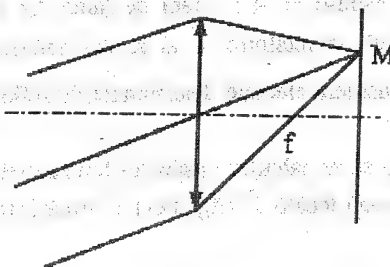


Fig. 142

De unde:

$$k_0 - k = \frac{2e}{\lambda} (1 - \cos i) \approx \frac{ei^2}{\lambda}$$

Expresia razei unghiulare a inelelor este:

$$i = \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \sqrt{k - k_0},$$

iar în planul focal raza liniară este de forma:

$$r = f \sqrt{\frac{\lambda}{|D_1 - D_2|}} \sqrt{k - k_0}$$

2. - Să se analizeze modificările tabloului de interferență dacă se măresc dimensiunile sursei de radiație. Care este diferența dintre tabloul obținut în acest caz față de cazul precedent.

R: Să considerăm că se măresc dimensiunile sursei.

a)  $D_1 = D_2$ ; tabloul de interferență este uniform iluminat și cu intensitate maximă, deoarece pentru orice valoare a unghiului de incidență  $i$  este îndeplinită condiția:

$$\delta = |D_1 - D_2| \cos i = 0.$$

b)  $D_1 \neq D_2$ ; inelele sunt localizate la infinit deoarece sursa este largă.

3. - Considerând sursa de radiație  $S$  ca fiind punctiformă, iar  $D_1 = D_2$ , se introduce în fața oglinzii  $M_2$  o lamă de sticlă cu grosimea  $e$  și de indice de refracție  $n$ . Să se descrie aspectul figurii de interferență observată pe ecranul  $E$  care coincide cu planul focal  $F$  al lentilei  $L$  de distanță focală  $f$  (fig. 143).

Aplicație numerică: Să se calculeze distanța dintre punctul  $F$  și primul maxim de intensitate observat pe ecranul  $E$  dacă  $n = 1,5$ ,  $e = 0,1 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $f = 10 \text{ cm}$ .

R: Să se analizeze propagarea razelor prezentate în fig. 5. Din cauza reflexiei pe oglinda  $M_2$  se poate considera că o rază traversează o lamă de grosime  $2e$ , iar cealaltă rază nu o traversează. În aceste condiții:

$$\delta = 2e(\cos i - n \cos r).$$

Deoarece valoarea  $i$  a unghiului de incidență este mică, se poate scrie, dezvoltând în serie:

Aplicație numerică: Să se calculeze distanța dintre punctul  $F$  și primul maxim de intensitate observat pe ecranul  $E$  dacă  $n = 1,5$ ,  $e = 0,1 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $f = 10 \text{ cm}$ .

R: Să se analizeze propagarea razelor prezentate în fig. 144. Din cauza reflexiei pe oglinda  $M_2$  se poate considera că o rază traversează o lamă de grosime  $2e$ , iar cealaltă rază nu o traversează. În aceste condiții:



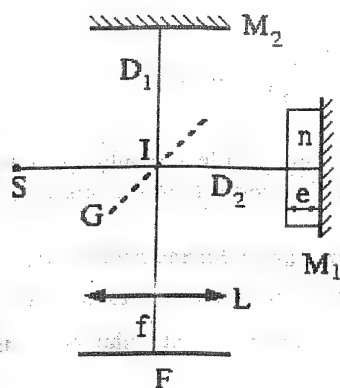


Fig. 143

$$\delta = 2e(\cos i - n \cos r)$$

Deoarece valoarea  $i$  a unghiului de incidență este mică, se poate scrie, dezvoltând în serie:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e(n-1)}{\lambda} + \frac{e(n-1)i^2}{n\lambda} = k$$

$$\frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{2e(n-1)}{\lambda} = k_0,$$

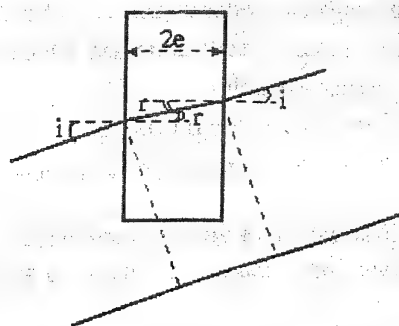


Fig. 144

de unde:

$$k - k_0 = \frac{e(n-1)}{n\lambda} i^2.$$

Deci:

$$i = \sqrt{\frac{n\lambda}{e(n-1)}} \sqrt{k - k_0}.$$

Prin urmare inelele de interferență se formează la infinit și se pot observa în planul focal al lentilei L; raza lor este:

$$r = f \sqrt{\frac{n\lambda}{e(n-1)}} \sqrt{k - k_0}$$

Sursa fiind punctiformă, inelele nu sunt localizate la infinit.

Aplicație numerică:

$$k_0 = 200$$

Pentru primul maxim  $k - k_0 = 1$  iar raza acestuia este dată de:

$$r = f \sqrt{\frac{n\lambda}{e(n-1)}} = 12 \text{ mm}$$

4. - Deoarece lama de sticlă nu este perfect plană, dorim să evaluăm deformările ei. Să se indice cum trebuie completat montajul din fig. 140.

R: Montajul trebuie completat cu o lentilă  $O_1$ , sursa de radiație optică fiind plasată în focarul acesteia. În acest mod lama  $l$  supusă verificării este traversată de un fascicul de raze paralele, perpendicular pe aceasta. În aceste condiții, variațiile de fază sunt determinate numai de variațiile de grosime ale lamei. Obiectivul  $O_2$  permite razelor să pătrundă în ochi, care este acomodat pe imaginea lamei  $l$  văzută prin intermediul lentilei  $O_2$  (fig. 145).

5. - Sursa de radiație emite lumină albă. Lama de sticlă de grosime  $e = 0,1 \text{ mm}$ , este considerată perfectă și plasată în montajul precedent ( $D_1 = D_2$ ). Fasciculul de raze paralele care emerge din interferometru este incident pe fanta unui spectrograf. Să se determine valorile  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ale celor mai mici lungimi de undă care formează trei caneluri strălucitoare succesive în domeniul vizibil ( $400 \leq \lambda \leq 800$ ) nm. Să se stabilească numărul total de caneluri în acest domeniu. (Se va considera că indicele de refracție al lamei nu depinde de lungimea de undă.)

R: Incidența fiind normală, diferența de drum optic este:

$$\delta = \delta_0 = 2e(n-1);$$

$$\text{pentru } \lambda = 400 \text{ nm, se obține: } \frac{\delta_0}{\lambda} = 250;$$

$$\text{pentru } \lambda = 800 \text{ nm, se obține: } \frac{\delta_0}{\lambda} = 125.$$

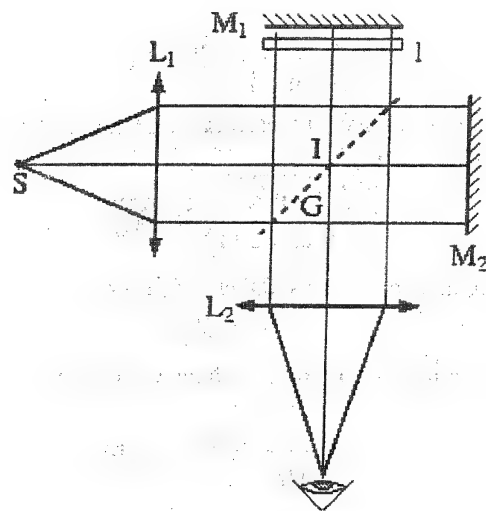


Fig. 145

Numărul de caneluri luminoase este:  $125 + 1 = 126$

Lungimile de undă  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  solicitate de problemă sunt:

$$\lambda_1 = 400 \text{ nm}, \lambda_2 = \frac{\delta_0}{249} = 401,6 \text{ nm}, \lambda_3 = \frac{\delta_0}{248} = 403,2 \text{ nm}$$

### Studiul unui strat dielectric. Reflexii multiple

Se consideră un strat dielectric de substanță cu indice de refracție  $n_1$ , care acoperă un suport cu indice  $n_2$ . Indicele de refracție al mediului exterior este egal cu  $n_0$  (fig. 146). Notăm cu  $r_1$  și  $t_1$ ,  $r_2$  și  $t_2$  amplitudinile oscilațiilor reflectate și transmise pentru fiecare suprafață de separație, radiația propagându-se din mediul cu indice  $n_0$  spre mediul cu indice  $n_2$ . (Se notează cu  $r'_1$  și  $t'_1$ ,  $r'_2$  și  $t'_2$  aceste amplitudini pentru sensul de propagare invers). Mărimile  $R'_1$  și  $T'_1$ ,  $R'_2$  și  $T'_2$  reprezintă factorii de reflexie și de transmisie corespunzători.

1. - Să se calculeze expresiile mărimilor  $r_2$ ,  $t_2$  și  $t'_2$ , incidența fiind normală și ale mărimilor  $R_2$  și  $T_2$  incidența fiind normală și oarecare.

Să se stabilească relația ce există între mărimile  $r_2$  și  $t_2$ :

- Dacă incidența este oarecare;
- Dacă aceasta este normală.

Să se verifice existența relației:  $t_2 \cdot t'_2 = 1 - r_2^2$ .

$$\text{R: } r_2 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad t'_2 = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$$

$$R^2 = r_2^2$$

$$\begin{array}{c} n_0 \\ \hline n_1 \\ \hline n_2 \end{array}$$

Fig. 146

Incidență oarecare:  $T_2 = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t_2^2$

Incidență normală:  $T_2 = \frac{n_2}{n_1} t_2^2$

a)  $r_2^2 + \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t_2^2 = 1$ , deoarece  $R + T = 1$ ;

b)  $r_2^2 + \frac{n_2}{n_1} t_2^2 = 1$ ,  $t_2 t_2' = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - r_2^2$

2. - Se consideră incidența normală. Considerând reflexiile multiple să se calculeze amplitudinea transmisă; pentru ansamblul de straturi să se calculeze factorii de transmisie  $T$  și de reflexie  $R$ .

R: Expresia amplitudinii câmpului transmis  $A_t$  este:

$$A_t = t_1 t_2 (1 + r_1 r_2 e^{i\varphi} + \dots) = \frac{t_1 t_2}{1 + r_1 r_2 e^{i\varphi}},$$

deoarece:  $r_1' = -r_1$ .

Factorul de transmisie  $T$  este egal cu  $|A_t|^2$  multiplicat cu raportul  $\frac{n_2}{n_0}$ :

$$T = \frac{n_2}{n_0} \times \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \varphi}$$

Se poate scrie:  $T = \frac{\frac{n_2}{n_1} t_2^2 \times \frac{n_1}{n_0} t_1^2}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \varphi} = \frac{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \varphi}$

de unde:  $R = 1 - T = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \varphi}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \varphi}$

3. - Să se calculeze expresia factorului de transmisie  $T$ , considerând  $n_0 = n_2$ .

R: Dacă:  $n_0 = n_2$ ,

$$r_2 = -r_1 = \sqrt{R} = \sqrt{1 + T},$$

prin urmare:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\tau^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi} = \frac{\tau^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

Această expresie reprezintă factorul de transmisie Fabry-Perot.

### Rețea de difracție prin reflexie.

Rețeaua de difracție  $R$ , care funcționează prin reflexie, a cărei profilul este prezentat în fig. 147 ( $p$  reprezintă perioada rețelei,  $\varepsilon$  grosimea părților în relief, iar  $N$  numărul de linii în relief (sau scobite) ale rețelei), este iluminată de un fascicul de raze paralele (de o undă plană) incident pe rețea sub unghiul de incidență  $i$ .

Pentru această rețea să se calculeze valoarea intensității difractate la infinit în direcția caracterizată de unghiul  $\theta$ . Se va analiza cazul în care lărgimea  $a$  a liniilor în relief este egală cu lărgimea  $b$  a liniilor scobite.

Să se reprezinte grafic variația intensității pentru cazul  $\varepsilon = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ .

**R:** Amplitudinea radiației difractate de către o trăsătură reflectantă de lărgime  $a$  a rețelei de înălțime  $l$ , unde:  $a \gg l$ , este dată de relația:

$$A_a = al \frac{\sin \frac{\pi(\sin i \pm \sin \theta)a}{\lambda}}{\frac{\pi(\sin i \pm \sin \theta)a}{\lambda}},$$

iar pentru o trăsătură de lărgime  $b$  de relația:

$$A_b = bl \frac{\sin \frac{\pi(\sin i \pm \sin \theta)b}{\lambda}}{\frac{\pi(\sin i \pm \sin \theta)b}{\lambda}},$$

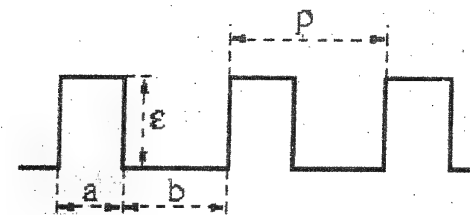


Fig. 147

unde semnul  $(+)$  se referă la cazul când fasciculul incident, respectiv cel difractat sunt de aceeași parte a normalei la rețea, iar semnul  $(-)$  dacă acestea sunt de o parte și de alta a normalei. Amplitudinile fiind reale au aceeași fază, respectiv faza de origine, care corespunde oscilațiilor reflectate în punctele I și J (fig. 148, 149). Dacă  $p$  reprezintă perioada rețelei, valoarea amplitudinii câmpului la infinit este:

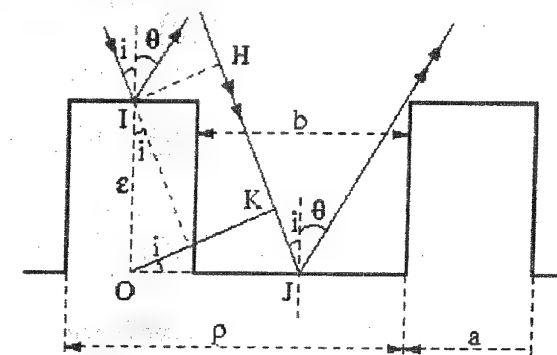


Fig. 148

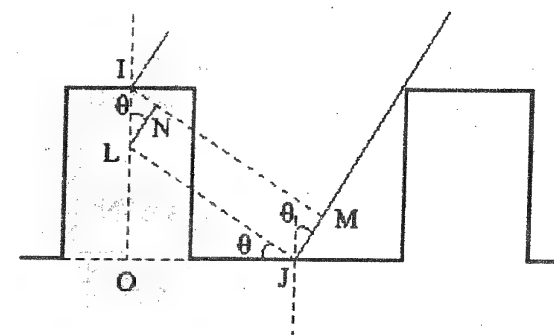


Fig. 149

$$A_a + A_b e^{i\varphi},$$

unde:  $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$ , în care  $\delta = HJ + JM$  (fig. 148, 149).

$$HJ = HK + KJ = \varepsilon \cos i + \frac{a+b}{2} \sin i,$$

$$JM = (OI - OL) \cos \theta = \varepsilon \cos i - \frac{a+b}{2} \sin \theta,$$

$$\delta = 2\varepsilon + \frac{p}{2} (\sin i - \sin \theta).$$

Dacă razele incidente și reflectate sunt dispuse de aceeași parte a normalei, se obține:

$$\delta = 2\varepsilon - \frac{p}{2} (\sin i + \sin \theta),$$

de unde:

$$\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} - \frac{\pi p (\sin i + \sin \theta)}{\lambda}$$

În cazul general se poate scrie:

$$\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} \pm \frac{\pi p (\sin i \mp \sin \theta)}{\lambda}$$

Diferența de fază corespunzătoare la două trăsături consecutive este:

$$\Psi = \frac{2\pi p (\sin i \mp \sin \theta)}{\lambda}$$

Amplitudinea câmpului la infinit difractat de către rețea este:

$$A = (A_a + A_b e^{i\varphi}) [1 + e^{i\Psi} + \dots + e^{i(N-1)\Psi}]$$

respectiv valoarea intensității  $I$ :

$$I = (A_a^2 + A_b^2 + 2A_a A_b \cos \varphi) \frac{\sin^2 N \frac{\Psi}{2}}{\sin^2 \frac{\Psi}{2}}$$

Dacă:

$$a = b = \frac{p}{2},$$

$$I = 2A^2 (1 + \cos \varphi) \frac{\sin^2 N \frac{\Psi}{2}}{\sin^2 \frac{\Psi}{2}},$$

$$\text{unde: } \varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} \pm \frac{\pi p (\sin i \mp \sin \theta)}{\lambda} \text{ și } \frac{\Psi}{2} = \frac{\pi p (\sin i \mp \sin \theta)}{\lambda},$$

iar valoarea unghiului  $i$  este constantă.

Dacă se consideră  $i = 0$ , se obține:

$$I = 2a^2 l^2 \underbrace{\left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda} \pm \frac{\pi p \sin \theta}{\lambda} \right) \right]}_{(1)} \underbrace{\left( \frac{\sin^2 \frac{\pi p \sin \theta}{2\lambda}}{\frac{\pi p \sin \theta}{2\lambda}} \right)^2 \left( \frac{\sin^2 \frac{N \pi p \sin \theta}{\lambda}}{\frac{N \pi p \sin \theta}{\lambda}} \right)^2}_{(2)}$$

Factorul (1) corespunde unei modulări sinusoidale a semnalului cu perioada unghiulară  $\frac{2\lambda}{p}$  decalată (pentru  $\theta = 0$  această expresie nu poate avea valoare maximă din cauza

defazajului  $\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda}$ ). Factorul (2) descrie figura de difracție determinată de o singură fantă ( $a = \frac{p}{2}$ ). Se evidențiază numai maximele de ordin impar, dacă

$\varepsilon = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$  maximul de ordin zero se anulează și se observă maximele de ordin impar (fig. 150).

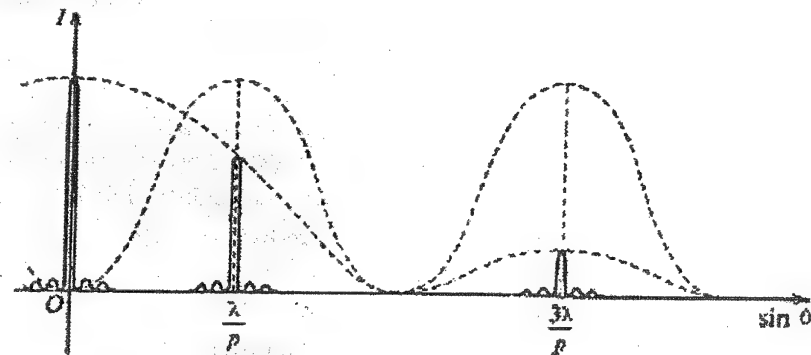


Fig. 150



Dacă  $i \neq 0$ , în relația intensității se înlocuiește mărimea  $\sin \theta$  prin  $(\sin i \pm \sin \theta)$  iar maximele se obțin pentru  $(\sin \theta = \frac{\lambda}{P} \pm \sin i)$ .

### Rețea de difracție tip rețea de fază.

Se consideră că rețeaua de difracție din problema precedentă, transparentă și confecționată din sticlă cu indice de refracție  $n$  (rețea de fază), este iluminată de un fascicul de raze paralele (de o undă plană); se consideră  $a = b$  și  $\epsilon \ll \lambda$ .

Să se calculeze amplitudinea maximelor de difracție de la infinit; să se determine amplitudinea maximelor spectrului de difracție observat în planul focal-imagini al unei lentile  $L_1$ , rețeaua fiind plasată în planul focal-obiect al acestei lentile (fig. 152).

Imaginea nu poate fi observată în planul focal al unei lentile  $L_2$  (Se consideră că lentilele  $L_1$  și  $L_2$  au aceeași distanță focală  $F$ ). Să se explice acest fapt arătând că valoarea vizibilității:

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

este egală cu zero. Să se arate de ce contrastul de fază face să se observe o imagine. Se va considera că lentilele nu micșorează deschiderea fasciculelor.

**R:** Calculăm diferența de drum  $\delta_{OJ}$  (fig. 151).

a) Cazul când razele sunt dispuse de o parte și de alta a normalei:

$$\delta_{OJ} = \frac{P}{2} (\sin i - \sin \theta) + \epsilon(n-1).$$

b) Cazul când razele sunt dispuse de o singură parte a normalei:

$$\delta_{OJ} = \frac{p}{2}(\sin i + \sin \theta) + \varepsilon(n-1).$$

Se obține:

$$\varphi_{OJ} = \frac{\pi p v}{\lambda} + \varphi.$$

unde:

$$v = \sin i \pm \sin \theta \quad \text{și} \quad \varphi = \frac{2\pi\varepsilon(n-1)}{\lambda}.$$

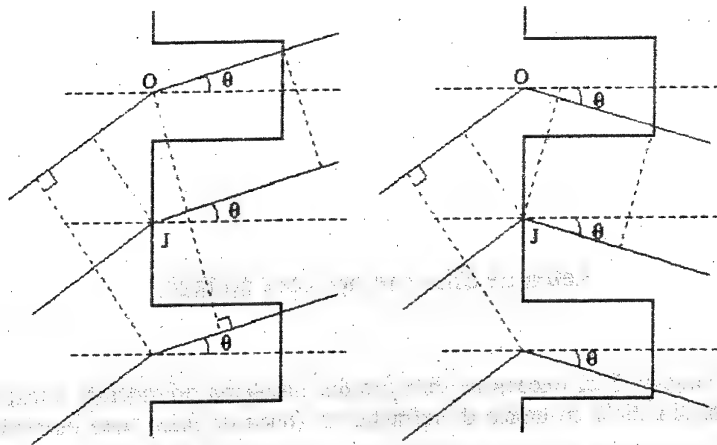


Fig. 151

Amplitudinea câmpului difractat la infinit este:

$$A = al \frac{\sin \frac{\pi v p}{2\lambda}}{\frac{\pi v p}{2\lambda}} \left( 1 + e^{i\left(\frac{\pi v p}{\lambda} + \varphi\right)} + e^{i2\left(\frac{\pi v p}{\lambda} + \varphi\right)} + \dots + e^{i(N-1)\left(\frac{\pi v p}{\lambda} + \varphi\right)} \right)$$

unde:

$$\Psi = \frac{2\pi p(\sin i \pm \sin \theta)}{\lambda},$$

deci:

$$A = 2al \cos\left(\frac{\pi v p}{2\lambda} + \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\sin \frac{\pi v p}{2\lambda}}{\frac{\pi v p}{2\lambda}} \frac{\sin \frac{N\pi v p}{\lambda}}{\sin \frac{\pi v p}{\lambda}} e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

unde  $l$  reprezintă lungimea unei trăsături a rețelei.

Maximele de difracție se obțin pentru  $v = \pm \frac{k\lambda}{p}$ ; deoarece  $a = b$  (creneluri), maximele de ordin par sunt nule  $k = 2n + 1$ , de unde:

$$A = 2Nal \cos\left[\frac{\varphi}{2} \pm (2n+1)\frac{\pi}{2}\right] \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

În planul focal al lentilei  $L_1$ , se înregistrează imagini punctiforme cărora le corespund amplitudinile (până la un factor) date de relațiile:

$$A_0 = Nal \cos \frac{\varphi}{2}, \quad A_{\pm 1} = \mp 2Nal \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$A_{\pm 3} = \mp \frac{1}{3} \frac{2}{\pi} Nal \sin \frac{\varphi}{2}, \quad A_{\pm 5} = \mp \frac{1}{5} \frac{2}{\pi} Nal \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Considerând  $i = 0$ , în planul focal al lentilei  $L_1$  distanța  $A_0A_1$  este egală cu:

$$Fv = F \sin \theta. \text{ Deoarece } \sin \theta = \frac{\lambda}{p}, \text{ se obține: } A_0A_1 = \frac{F\lambda}{p}.$$

La infinit, acestor imagini punctiforme, care reprezintă surse corente, le corespunde amplitudinea  $A'$  (fig. 152); pentru  $A_0$  și  $A_1$  diferența de drum în direcția  $\theta'$  este:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{F\lambda}{p} \cdot \sin \theta' = \frac{2\pi x'}{p}, \text{ deoarece: } \sin \theta' \cong \frac{x'}{F'}.$$

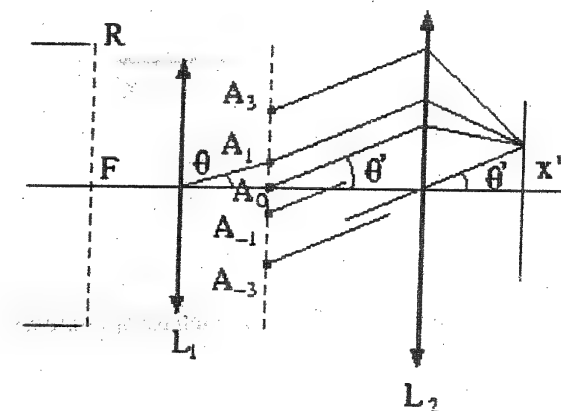


Fig. 152

Prin urmare franjele de interferență sunt acromate. În planul focal al lentilei  $L_2$ , până la un factor de forma  $Nal$ , valoarea amplitudinii este:

$$A' = \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\pi} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + \\ + \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{3\pi} (e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi}) + \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{5\pi} (e^{5i\varphi} - e^{-5i\varphi}) + \dots$$

de unde:

$$A' = \cos \frac{\varphi}{2} - \\ - e^{i\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{2\pi x'}{p} + \frac{1}{3} \sin 2\pi \frac{3x'}{p} + \frac{1}{5} \sin 2\pi \frac{5x'}{p} + \dots \right)$$

expresie ce poate fi scrisă sub forma:

$$A' = \cos \frac{\varphi}{2} - e^{i\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} Cr(x')$$

Intensitatea determinată de aceste două vibrații în cuadratură este:

$$I' = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} [Cr(x')]^2,$$

însă funcția  $Cr(x')$  este egală cu  $\pm 1$  (fig. 153).

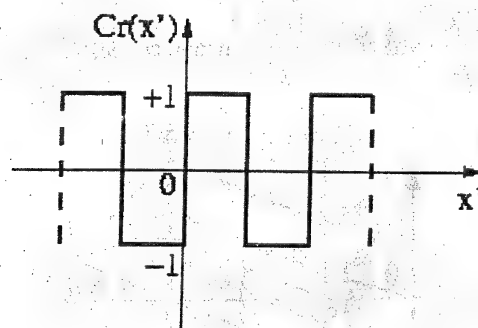


Fig. 153

Valoarea intensității maxime este egală cu cea a intensității minime:

$$I_{\max} = I_{\min} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1,$$

deci contrastul  $\gamma = 0$ .

Contrastul de fază se obține plasând o lamă de fază pe traseul vibrației  $A_0$ ,

astfel încât  $A_0$  să devină  $A_0 e^{i\frac{\pi}{2}}$ . Unghiul de defazare  $\varphi$  fiind mic, se poate scrie:

$$A' = e^{i\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - \frac{\varphi}{2} Cr(x') \right]$$

Dacă se neglijează valoarea termenului  $\varphi^2$ , expresia intensității devine:

$$I' \cong 1 - \varphi Cr(x')$$

Deoarece:  $I'_{\max} \approx 1 + \varphi$  și  $I'_{\min} \approx 1 - \varphi$ , se obține:

$$\gamma \cong 2\varphi,$$

adică valoarea contrastului este diferită de zero și ca rezultat se poate forma imaginea.

### Experiența lui Abbe.

O rețea  $R$  de amplitudine (lărgimea trăsăturilor opace este egală cu cea a trăsăturilor transparente) este iluminată normal de un fascicul de raze paralele (undă plană). Rețeaua este dispusă în planul focal al lentilei  $L_1$  de distanță focală  $F$ . Dacă se formează spectrul de difracție al rețelei în planul focal al imaginii lui  $L_1$ , să se arate că imaginea rețelei se poate observa la infinit. Ce se observă dacă rețeaua  $R$  se îndepărtează de lentila  $L_2$ ?

**R:** În planul focal al lui  $L_1$ , se observă surse punctiforme cărora le corespund amplitudinile (fig. 154):

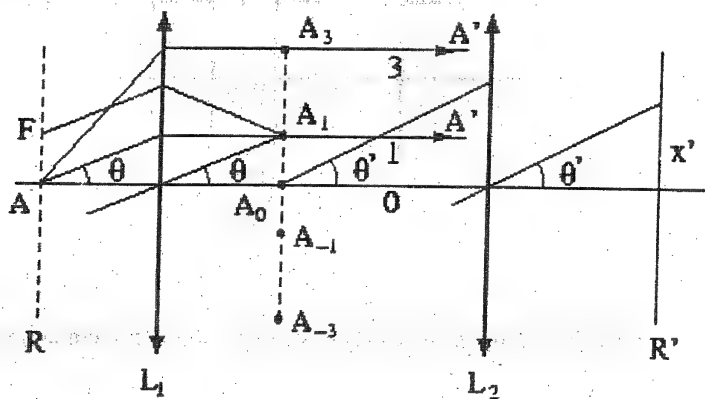


Fig. 154

$$A_0 = 1, A_{\pm 1} = +\frac{2}{\pi}, A_{\pm 3} = -\frac{2}{3\pi}, \dots$$

Imaginea  $A'$  a lui  $A$  fiind la infinit, maximele spectrului notate  $A_0, A_1, A_3, \dots$ , care au aceeași fază ca oscilațiile razelor 0, 1, 3, ... (transformata Fourier a funcției pare  $R(x)$  fiind reală, amplitudinile sunt reale) sunt deci în fază. Ca și în cazul problemei precedente, observarea se efectuează în planul focal al lentilei  $L_2$  a cărei distanță focală este egală cu cea a lentilei  $L_1$ ; de această dată valoarea amplitudinii este:

$$A' = 1 + \frac{2}{\pi} (e^{i\Phi} + e^{-i\Phi}) - \frac{2}{3\pi} (e^{3i\Phi} + e^{-3i\Phi}) + \dots,$$

unde:  $\Phi = \frac{2\pi F}{p\lambda} \lambda \sin \theta' = \frac{2\pi x'}{p}$ , de unde se obține:

$$A' = 1 + \frac{4}{\pi} \left( \cos 2\pi \frac{x'}{p} - \frac{1}{3} \cos 2\pi \frac{3x'}{p} + \frac{1}{5} \cos \frac{3x'}{p} + \dots \right) = R(x'),$$

$$I = [R(x')]^2$$

În acest mod se regăsește imaginea rețelei, intensitatea fiind nulă sau egală cu

4.

Dacă rețeaua  $R$  este deplasată (fig. 155), oscilațiile  $A_0, A_1, A_3, \dots$ , nu mai sunt în fază, iar suprafața de undă pentru razele 0, 1, 3, ... este sfera de rază  $A'$ , imaginea lui  $A$ . Imaginea rețelei  $R'$  se va forma la nivelul lui  $A'$ , unde, prin reglarea dispozitivului, variațiile de fază sunt compensate.

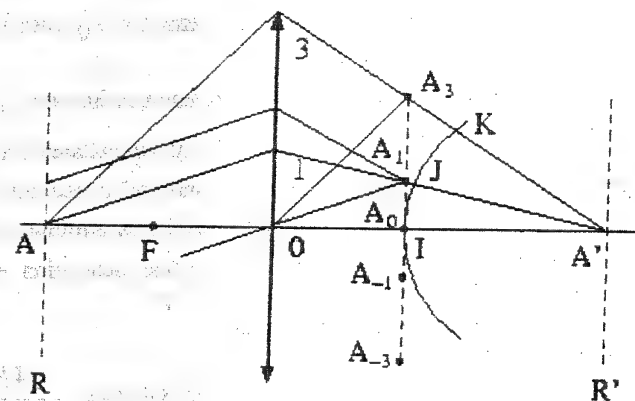


Fig. 155

### Interferometrul Fabry-Perot.

#### Analiza structurii spectrale a radiației optice.

Notăm prin  $R$  factorul de reflexie al lamelor unui interferometru Fabry-Perot care sunt distanțate între ele cu  $e = 2,5 \text{ mm}$ . Valoarea mare a factorului de reflexie  $R$  este obținută prin realizarea de straturi multiple dielectrice. Se consideră  $\lambda_0$  lungimea de undă a unui fascicul de radiație optică de intensitate  $I_0$  care iluminează interferometrul.

a). Pentru ce valoare a lui  $R$  poate fi observată radiația cu lungime de undă  $\lambda$  a cărei intensitate este egală cu  $3 \cdot 10^{-3} I_0$  ( $\lambda$  se află în vecinătatea lui  $\lambda_0$ ). Se admite că observarea este posibilă atunci când intensitatea maximă a sistemului de inele corespunzător radiației  $\lambda$  este mai mare decât  $1/5$  din intensitatea minimă a sistemului de inele corespunzător radiației  $\lambda_0$ . Să se arate că se poate determina excedentul fracționar al centrului măsurând raza unghiulară a primului inel.

R: Intensitatea transmisă prin interferometru este:

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\Phi}{2}}, \text{ unde: } T = 1 - R, \text{ iar } m = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

Valoarea intensității maxime este:  $I_{\max} = I_0$ , iar a celei minime:

$$I_{\min} = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2}.$$

Problema solicită condiția:

$$I = 3 \cdot 10^{-3} I_0 = \frac{I_0 (1-R)^2}{5 (1+R)^2},$$

de unde:  $\frac{(1-R)^2}{(1+R)^2} = 0,015$ , respectiv:  $R = 0,78$ .

Pentru primul inel de interferență se obține:

$$p = \frac{2e \cos i}{\lambda} = k_1,$$

iar în centru:  $p_0 = \frac{2e}{\lambda} = k_1 + \varepsilon$

b) Să se calculeze intervalul între ordinele de interferență pentru  $i = 0$ , adică intervalul spectral ( $\Delta\sigma_0$ ) exprimat în numere de undă, (respectiv  $\Delta\lambda_0$  exprimat în lungimi de undă) corespunzând unei variații egală cu unitatea a ordinului de interferență  $p_0$ . Să se exprime în funcție de factorul de finețe  $F$  și de ( $\Delta\lambda_0$ ) cel mai mic interval spectral care poate fi determinat de interferometru și să se calculeze valoarea acestuia.

R:  $p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$ ,  $p_0 + 1 = \frac{2e}{\lambda}$ , de unde:

$$2e(\sigma - \sigma_0) = 1, \quad (\Delta\sigma)_0 = \frac{1}{2e} = 2 \text{ cm}^{-1}.$$

În același mod:  $\Delta\lambda_0 = \lambda_0^2 \Delta\sigma_0 = \frac{0,25 \cdot 2}{10^4} = 0,5 \text{ Å}.$

Pe de altă parte:

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{2ne}{\lambda} F, \text{ unde: } F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = 12,7,$$

deci:  $d\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2neF} = \frac{\Delta\lambda_0}{F} = \frac{0,5}{12,7} = 0,04 \text{ Å}$



c) Intervalul spectral  $\lambda - \lambda_0$  este de ordinul  $0,1 \text{ \AA}$ . Măsurătorile asupra excedentului fracționar în centru dau pentru  $\lambda_0$  valoarea  $\varepsilon_0 = 0,65 \pm 0,01$ , iar pentru  $\lambda$  valoarea  $\varepsilon = 0,54 \pm 0,01$ . Știind că  $\lambda_0 = 5460,74 \text{ \AA}$ , să se determine valoarea  $\lambda$ .

R: În centru, pentru  $\lambda_0$ :  $p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0} = k_1 + \varepsilon_0$ ,

iar pentru  $\lambda$ :  $p = \frac{2ne}{\lambda} = k_1 + \varepsilon$

dar:  $\frac{dp}{p} = -\frac{d\lambda}{\lambda} = \lambda_0 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2e}$ , de unde:  $d\lambda = -\frac{\lambda_0^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2e} = 0,06 \text{ \AA}$

$$\lambda = \lambda_0 + d\lambda = (5460 \pm 0,02) \text{ \AA}$$

Eroarea asupra mărimii  $d\lambda$ , respectiv  $\lambda_0$ , este  $0,01 \text{ \AA}$ , deci eroarea asupra lui  $\lambda$  este  $0,02 \text{ \AA}$ .

Prin urmare:  $p_0 - p = \frac{eI^2}{\lambda} = \varepsilon$ , unde mărimea  $\varepsilon$  reprezintă excedentul fracționar:

$$\varepsilon = \frac{eI^2}{\lambda}$$

## Efectul Doppler

O sursă punctiformă  $S$ , care emite radiație optică de lungime de undă  $\lambda_0$ , este dispusă în focarul  $F$  al unei lentile  $L$ . După traversarea lentilei, razele se reflectă pe oglinda ( $M$ ) dispusă perpendicular pe axa optică. Să se determine poziția imaginii reflectate de oglinda ( $M$ ) și variația lungimii de undă în următoarele două cazuri:

a) Oglinda ( $M$ ) se deplasează cu viteza  $v$ , perpendicular pe axa optică.

R: a) - Problema se poate analiza în două moduri:

1) - Razele emergente din sursa  $S$  și reflectate de oglinda ( $M$ ) par a proveni de la sursa imobilă  $S'$  care emite radiație optică de lungime de undă  $\lambda_0$ . Deci în planul focal al lentilei  $L$  nu se observă o deplasare a imaginii și nici o variație a lungimii de undă.

2) - Problema se poate analiza aplicând legătura dintre unghiuri și lungimea de undă în sistemul de referință fix și cel mobil legat la oglindă:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}, \quad \lambda = \frac{\lambda' (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

unde  $\theta$ , respectiv  $\theta'$  reprezintă unghiurile formate de vectorul viteză  $v$  cu vectorii de undă (unde vectorii  $u$  și  $u'$  sunt dirijați în sensul propagării radiației optice (fig. 156, 157, mărimea  $\theta - \theta'$  reprezintă aberația).

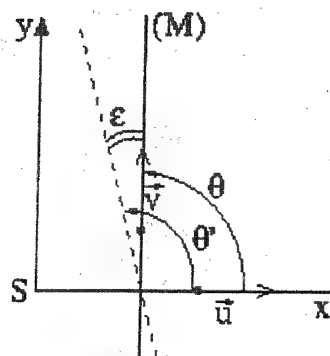


Fig. 156

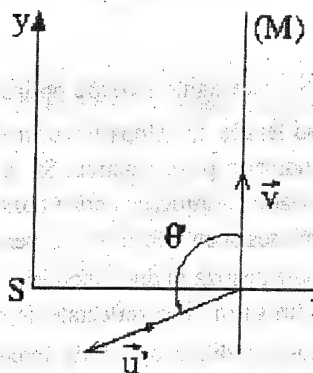


Fig. 157

Aceste relații se obțin dacă se exprimă elongația oscilației:  $a \cos 2\pi \nu \left( t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right)$  în sistemul mobil prin intermediul

$$\text{coordonatelor } x' \text{ și } t'; \text{ avem } x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y' = y \text{ și } t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ unde } x,$$

$y, x', y'$  sunt coordonatele observatorului în sistemul de referință fix, respectiv cel

mobil; elongația în sistemul mobil este de forma:  $a \cos 2\pi \nu' \left( t' - \frac{x' \cos \theta' + y' \sin \theta'}{c} \right)$  și prin identificarea fazelor se obțin relațiile de mai sus.

α) Sursa S este fixă iar observatorul legat de oglinda M se deplasează cu viteza  $v$ . În acest caz se obține (fig. 156):

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ deci: } \cos \theta' = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) = -\frac{v}{c}, \varepsilon \approx \frac{v}{c}, \lambda' = \lambda_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

β) Deoarece oglinda M retransmite radiația optică spre sistemul fix, aceasta poate fi considerată ca o sursă mobilă care se deplasează cu viteza  $v$  și emite un fascicul cu lungimea de undă  $\lambda'$ , înclinat sub un unghi  $\varepsilon$ ; în acest caz unghiul  $\theta'$  este cel indicat în fig. 157, iar vectorul de undă este orientat după direcția  $u'$ . Se obține:

$$\cos \theta' = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) = -\frac{v}{c} = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta},$$

de unde rezultă:  $\cos \theta = 0$ , adică:  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\text{iar relația: } \lambda = \lambda' \frac{\left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ conduce la:}$$

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda_0, \text{ deoarece: } \lambda' = \lambda_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Rezultă că nu apare o deplasare de imagine și nici o variație a lungimii de undă.

b) Oglinda (M) se deplasează cu viteza  $v$ , în sensul axei optice.

R: Asemănător cu cazul precedent, problema poate fi analizată în două moduri; presupunem că oglinda se îndepărtează de sursa S.

1) Viteza imaginii virtuale  $S'$  de unde par să provină razele este  $2v$ .  
Deoarece:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta \frac{2v}{c}}{1 - \frac{2v}{c} \cos \theta}, \quad \cos \theta = -1, \text{ deci } \theta = \pi.$$

Fiindcă  $\theta' = \pi$  (fig. 158) și  $\lambda = \lambda' \frac{1 + \frac{2v}{c}}{\sqrt{1 + \frac{4v^2}{c^2}}}$ , unde  $\lambda' = \lambda_0$ ,

neglijând termenii în  $\frac{v^2}{c^2}$ , se obține:  $\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right)$ .

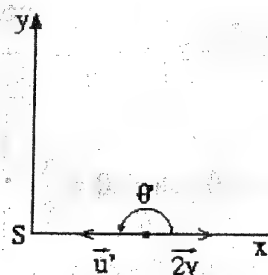


Fig. 158

adică nu apare o deplasare de imagine, ci numai o variație a lungimii de undă spre roșu:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_0 \frac{v}{c} \quad (S' \text{ se îndepărtează de } S)$$

2) Al doilea mod de analiză:

α) Sursa S este fixă iar observatorul legat la oglinda (M) se deplasează cu viteza  $v$ :

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda' \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Deoarece  $\theta = 0$  (fig. 159), se obține  $\cos \theta' = 1$  și  $\theta' = 0$ ,

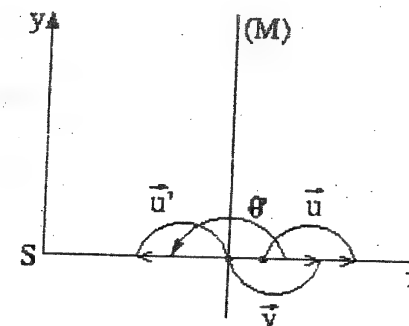


Fig. 159

prin urmare

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}}$$

β) Oglinda (M) care reflectă razele reprezintă o sursă mobilă care se deplasează cu viteza  $v$  emițând radiații de lungime de undă  $\lambda'$  spre sistemul fix. În acest caz  $\theta' = \pi$  (fig. 159), deci  $\cos \theta = -1$  iar  $\theta = \pi$ .  
Deci nu se observă deplasarea imaginii în sistemul fix, însă:

$$\lambda = \lambda' \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda_0 \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right).$$

În acest mod se regăsește:  $\Delta\lambda \approx 2\lambda_0 \frac{v}{c}$

### Prisma lui Wollaston

Un fascicul de raze paralele este incident normal pe prima față a blocului prismatic Wollaston (fig. 160). Să se arate că unghiul  $\beta$  format de raza ordinară cu cea extraordinară emergentă din bloc este dat de relația:

$$\beta = 2(n_e - n_o) \tan \alpha,$$
 unde  $\alpha$  reprezintă unghiul de deschidere a prisme indicat în fig. 160.

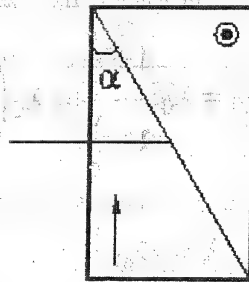


Fig. 160

**R:** Reamintim că radiația optică naturală poate fi descompusă în două oscilații rectangulare incoerente.

Presupunem că mediul anizotrop este uniax pozitiv ( $n_e > n_o$ ), de ex. cuarț, și construim raze refractate utilizând suprafața indicilor de refracție. Construcția razelor este simplificată deoarece normalele (obținute în a doua prismă prin secțiuni circulare ale suprafeței indicilor de refracție) și razele sunt confundate. Deoarece axele optice sunt încrucișate, oscilația extraordinară din prima prismă (proiecția axei pe planul

unde) devine ordinară în a doua prismă și invers. Legea lui Descartes care se aplică normalelor, în acest caz se aplică și razelor, prin urmare, cu notațiile indicate în fig. 161, se poate scrie (prima rază nu este dedublă):

$$a) \quad n_e \sin \alpha = n_o \sin(\alpha + i_o), \quad n_o \sin i_o = \sin I_o$$

$$b) \quad n_o \sin \alpha = n_e \sin(\alpha - i_e), \quad n_e \sin i_e = \sin I_e.$$

Deoarece valoarea unghiurilor  $i_o$ ,  $i_e$  este mică, se poate considera  $\cos i_o = \cos i_e \cong 1$ , de unde:

$$(n_e - n_o) \sin \alpha = n_o \sin i_o \cos \alpha = \sin I_o \cos \alpha$$

$$(n_o - n_e) \sin \alpha = -n_e \sin i_e \cos \alpha = -\sin I_e \cos \alpha$$

$$\sin I_o = \sin I_e = (n_e - n_o) \tan \alpha$$

$$\beta = I_o + I_e = 2(n_e - n_o) \tan \alpha$$

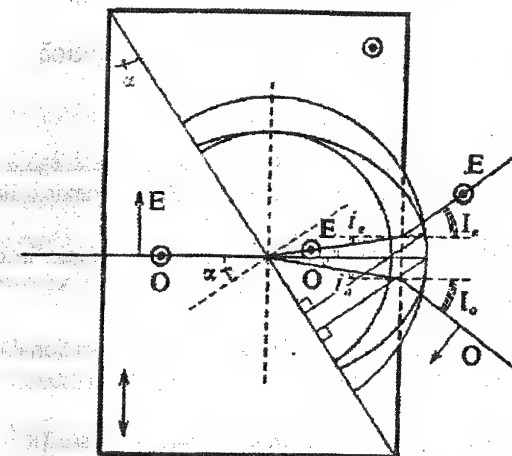


Fig. 161

### Obturarea unui fascicul de radiație optică

Să considerăm o deschidere circulară a cărei rază este egală cu  $R$ . Centrul acestei deschideri este obturat cu un ecran opac circular concentric de rază  $r$ , unde  $\frac{r}{R} = 0,1$ . Să se calculeze micșorarea iluminării relative la infinit, în centrul tabloului de difracție.

**R:** Amplitudinea câmpului difractat este proporțională cu suprafața deschiderii. Prin urmare, până la un factor de proporționalitate, iluminarea fără obturator este egală cu  $(\pi R^2)^2$  iar în prezența obturatorului este  $(\pi R^2 - \pi r^2)^2$ .

Micșorarea iluminării relative este:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\pi[(R^2)^2 - (R^2 - r^2)^2]}{\pi^2 (R^2)^2} = \frac{2r^2}{R^2} - \frac{r^4}{R^4}$$

Deoarece  $\frac{r}{R} = 0,1$ , se obține:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2r^2}{R^2} - \frac{r^4}{R^4} \approx \frac{2r^2}{R^2} = 0,02$$

### Funcția de transfer a unui sistem optic

Se realizează experiența lui Young conform montajului din fig. 162, unde  $O_1$  și  $O_2$  sunt două lentile identice cu distanța focală  $F$ , iar  $F_1$  și  $F_2$  reprezintă două fante situate la distanța  $f$ ; fanta-sursă  $f$ , de lărgime  $s$ , este dispusă în planul focal al lentilei  $O_1$  iar ecranul  $E$  se află în planul focal al lentilei  $O_2$ . Sistemul este iluminat cu radiație monocromatică de lungime de undă  $\lambda$ .

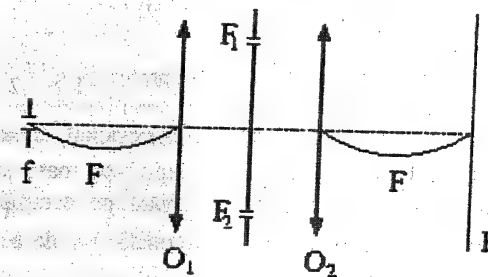


Fig. 162

Să se analizeze fenomenul considerând că ansamblul compus din lentilele  $O_1$  și  $O_2$ , respectiv fantele  $F_1$ ,  $F_2$  reprezintă un sistem optic  $S$  care formează imaginea fantei-sursă pe ecranul  $E$ .

a) Să se determine funcția de transfer  $d(\mu)$  a sistemului  $S$ , unde fantele  $F_1$  și  $F_2$  sunt identice și au aceeași lărgime  $a$ .



R: Imaginea unui punct M luminos al fantei-sursă, formată de sistemul S, are forma unei linii fine modulate în iluminare, centrată pe imaginea geometrică M' a punctului M (fig. 163).

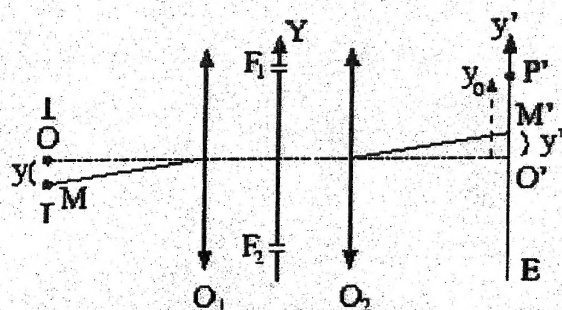


Fig. 163

La toate punctele fantei situate de aceeași parte a lui Y corespund imagini identice care, prin suprapunere, formează un sistem de franje. Fiecărei linii izolate a fantei îi corespunde un sistem de franje și, în particular, pentru cele trecând prin centrul O al fantei sursă, repartiția corespunzătoare a iluminării pe ecranul E este:

$$D(y') = a^2 b^2 \frac{\sin^2 \frac{\pi u' a}{\lambda}}{\left(\frac{\pi u' a}{\lambda}\right)^2},$$

unde  $u' = \sin \theta \approx \frac{y'}{F}$ , iar  $b$  reprezintă lungimea fantei  $F_1$  și  $F_2$ .

Prin urmare tabloul de interferență este unidimensional, de aceea analiza poate fi efectuată numai în planul figurii. Considerând faptul că toate punctele surse S, necoerente între ele, participă la iluminarea observată pe ecranul E, să calculăm valoarea intensității  $I_{P'}(y_0)$  în punctul P' de ordonată  $y_0$  de pe ecran. Notăm cu  $O(y')$  intensitatea în punctul M' a imaginii geometrice a fantei sursă  $f$ . Elementul-sursă  $dy'$  generează în punctul P' intensitatea:

$$O(y')D(y_0 - y')dy',$$

deci în punctul P', intensitatea este dată de produsul de convoluție:

$$I_{P'}(y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} O(y')D(y_0 - y')dy'$$

Dacă  $i(\mu)$ ,  $o(\mu)$  și  $d(\mu)$  reprezintă transformatele Fourier ale mărimilor  $I_{P'}(y_0)$ ,  $O(y')$ ,  $D(y')$ , atunci se poate scrie:

$$i(\mu) = o(\mu)d(\mu),$$

însă: 
$$o(\mu) = \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} e^{i2\pi\mu y'} dy' = s \frac{\sin \pi\mu s}{\pi\mu s}$$

și:  $D(y') = AA^* = A^2$  deoarece amplitudinea  $A$  a câmpului difractat este reală.

Dar: 
$$A = \frac{1}{F\lambda} \int f\left(\frac{Y}{F\lambda}\right) e^{i2\pi \frac{Y'}{F\lambda} Y} dY,$$

unde funcția  $f\left(\frac{Y}{F\lambda}\right)$  caracterizează transmisia deschiderilor celor două fante  $F_1$  și  $F_2$ ,  $Y$  fiind ordonata în planul deschiderii (fig. 163).

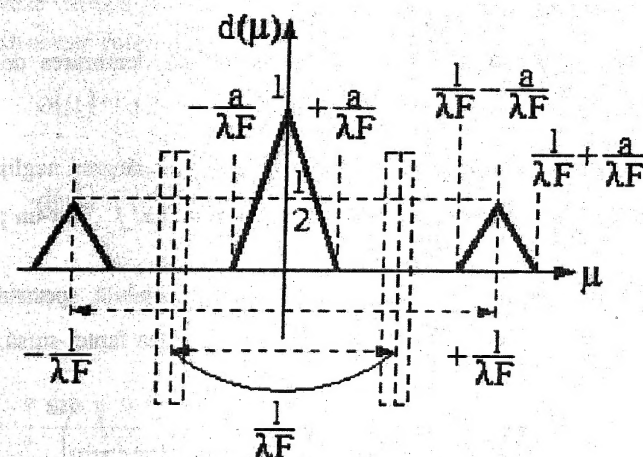


Fig. 164

Reciproca problemei este:

$$f\left(\frac{Y}{F\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-i \frac{2\pi y'}{F\lambda} Y} dy'$$

Această relație permite să se scrie:

$$d(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{Y}{F\lambda}\right) f\left(\mu - \frac{Y}{F\lambda}\right) d\left(\frac{Y}{F\lambda}\right).$$

Aceasta reprezintă funcția de autocorelare relativă a celor două fante  $f\left(\frac{Y}{F\lambda}\right)$  (fig. 164), fiind o funcție reală și pară.

Funcția  $d(\mu)$  are valoare maximă dacă  $\mu = 0$ , se anulează dacă  $\mu = \pm \frac{a}{F\lambda}$  și are valoarea  $d(\mu) = \frac{1}{2}$  dacă  $\mu = \pm \frac{l}{F\lambda}$ .

Prin urmare transformata Fourier a funcției  $I_{P'}(y_0)$  este dată de produsul:

$$i(\mu) = s \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s} d(\mu).$$

În această expresie funcția  $d(\mu)$  intervine ca un filtru pentru frecvențele spațiale ale obiectului în formă de fantă, spectrul său fiind:

$$s \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s}.$$

Funcția  $d(\mu)$ , prezentată în fig. 164, este cunoscută sub denumirea de *funcție de transfer*.

b) Presupunem că fanta-sursă și fantele  $F_1$  și  $F_2$  au lățimi neglijabile. Să se stabilească expresia intensității corespunzătoare imaginii fantei  $f$ , într-un punct  $P'$  al ecranului  $E$ .

**R:** Obiectul  $O(y)$  fiind fanta  $f$  de lățime neglijabilă, spectrul său  $o(\mu)$  este caracterizat prin coeficientul  $b$ , proporțional cu lungimea fantei-sursă, și se poate scrie:  $i(\mu) = b d(\mu)$ ,

$$\text{unde: } d(\mu) = \delta(\mu) + \frac{1}{2} \delta\left(\mu - \frac{l}{F\lambda}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\mu + \frac{l}{F\lambda}\right).$$

Deoarece lățimea fantelor  $F_1$  și  $F_2$  tinde la zero, mărimea  $\delta(\mu)$  reprezintă funcția lui Dirac.

Iluminarea în imagine este descrisă de transformata Fourier inversă  $\bar{F}[i(\mu)]$ :

$$I_{P'}(y_0) = b \int_{-\infty}^{+\infty} d(\mu) e^{-i 2\pi \mu y_0} d\mu,$$

de unde:

$$I_{P'}(y_0) = b \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mu) e^{-i 2\pi \mu y_0} d\mu + \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\mu - \frac{l}{F\lambda}\right) e^{-i 2\pi \mu y_0} d\mu + \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\mu + \frac{l}{F\lambda}\right) e^{+i 2\pi \mu y_0} d\mu$$

Adică:

$$I_{P'}(y_0) = b \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( e^{-i 2\pi \frac{ly_0}{F\lambda}} + e^{+i 2\pi \frac{ly_0}{F\lambda}} \right) \right] = b \left( 1 + \cos 2\pi \frac{ly_0}{F\lambda} \right).$$

În acest mod s-a regăsit relația care descrie distribuția intensității în tabloul de interferență din experimentul lui Young.

c) Se consideră că lățimea fantei-sursă  $f$  are valoarea  $s$  iar lățimea fantelor  $F_1$  și  $F_2$  este neglijabilă. În aceste condiții să se determine intensitatea în punctul  $P'$  și să se analizeze variația contrastului tabloului de interferență funcție de parametrul  $s$ .

**R:** În aceste condiții:

$$o(\mu) = s \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s} \quad \text{și} \quad i(\mu) = s \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s} d(\mu),$$

unde:

$$d(\mu) = \delta(\mu) + \frac{1}{2} \delta\left(\mu - \frac{l}{F\lambda}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\mu + \frac{l}{F\lambda}\right).$$

Prin urmare:

$$i(\mu) = s \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s} \delta(\mu) + \frac{s}{2} \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s} \delta\left(\mu - \frac{l}{F\lambda}\right) + \frac{s}{2} \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s} \delta\left(\mu + \frac{l}{F\lambda}\right)$$

Deci:

$$I_{P'}(y_0) = s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s} \delta(\mu) e^{-i 2\pi \mu y_0} d\mu + \frac{s}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s} \delta\left(\mu - \frac{l}{F\lambda}\right) e^{-i 2\pi \mu y_0} d\mu +$$

$$+ \frac{s}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s} \delta\left(\mu + \frac{l}{F\lambda}\right) e^{+i2\pi \mu y_0} d\mu.$$

$$I_{P'}(y_0) = s + \frac{s}{2} \frac{\sin \pi \frac{ls}{F\lambda}}{\pi \frac{ls}{F\lambda}} e^{-i2\pi \frac{ly_0}{F\lambda}} + \frac{s}{2} \frac{\sin \pi \frac{ls}{F\lambda}}{\pi \frac{ls}{F\lambda}} e^{+i2\pi \frac{ly_0}{F\lambda}},$$

adică:

$$I_{P'}(y) = s \left( 1 + \frac{\sin \pi \frac{ls}{F\lambda}}{\pi \frac{ls}{F\lambda}} \cos 2\pi \frac{ly_0}{F\lambda} \right).$$

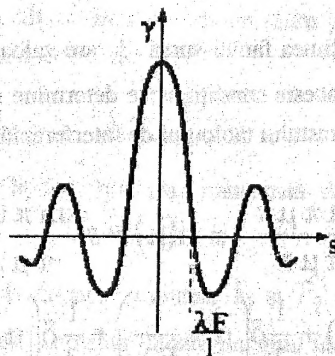


Fig. 165

Contrastul:

$$|\gamma| = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \frac{\sin \pi \frac{ls}{F\lambda}}{\pi \frac{ls}{F\lambda}} \right|.$$

Variația mărimii  $\gamma$  este prezentată în fig. 165. Mărimia  $\gamma$  reprezintă gradul de coerență complexă (spațială:  $\gamma = \gamma_{12}(0)$ ) a lui  $F_1$  și  $F_2$ .

Ultimul rezultat se poate interpreta în modul următor: pe aceeași figură (fig. 166), reprezentăm mărimea  $d(\mu)$  și spectrul frecvențelor spațiale  $O(\mu)$  al fantei sursă:

$$s \frac{\sin \pi \mu s}{\pi \mu s}$$

Amplitudinea acestui spectru se anulează când  $\mu = \frac{k}{s}$ , unde  $k = 1, 2, \dots$ , prima

valoare nulă se obține pentru  $\mu = \frac{1}{s}$ .

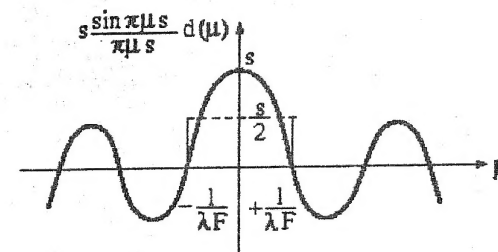


Fig. 166

Dacă este îndeplinită condiția exactă (în cazul figurii)  $\frac{1}{s} = \frac{l}{F\lambda}$ , pentru

frecvența  $\frac{l}{F\lambda}$  nu se obține nici un semnal, iar contrastul figurii de interferență este

nul. Într-adevăr, mărimea  $\gamma$  se anulează dacă  $\frac{\pi l s}{F\lambda} = k\pi$ , în particular pentru

$k = 1$ :

$$\frac{1}{s} = \frac{l}{F\lambda},$$

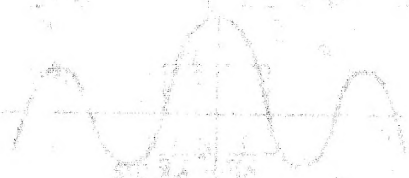
iar toleranța asupra lărgimii sursei  $S$  pentru a obține un tablou de interferență caracterizat printr-o valoare mare a contrastului este:

$$s < \frac{F\lambda}{l}$$

De aceea se consideră:

$$s \approx \frac{F\lambda}{2l}.$$





TIPARUL EXECUTAT LA  
CENTRUL DE MULTIPLICARE AL  
EDITURII UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA”

6600 Iași, Str. Păcurari nr. 9, tel. 032-114947

Format: 70×100/16  
Coli tip: 15,25  
Apărut: 2001  
Comanda: 75

